И. А. КАПЛАН

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

ЧАСТЬ V

(Численное решение алгебраических и трансцендентных уравнений, матричное исчисление, векторный анализ и интегрирование линейных дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными)

Издание второе, стереотипное

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Харьков 1972

517
К20

Книга содержит подробный разбор и решение типовых задач по таким разделам высшей математики: векторный анализ, алгебра матриц и их приложений к решению задач линейной алгебры, линейные дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка, решение алгебраических и трансцендентных уравнений.

Книга рассчитана на студентов высших технических учебных заведений и может быть полезной также преподавателям, ведущим практические занятия.

Илья Абрамович Каплан

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Часть V

КГПУ
[неразборчиво] библиотека
[неразборчиво]

Редактор *Р. М. Деревянченко*
Обложка художника *И. Ф. Криворучко*
Техредактор *Г. П. Александрова*
Корректор *Л. П. Пипенко*

Сдано в набор 28/VI 1968 г. Подписано к печати 20/X 1968 г. БЦ 68807.
Формат 60x90¹/₁₆. Объем: 25,75 физ. печ. л., 25,75 усл. печ. л., 22,3 уч.-изд. л.
Зак. 2-177. Тираж 75000. Цена 92 коп. Св. ТП 1972 г. поз. 31.

Отпечатано с матриц Книжной фабрики им. М. В. Фрунзе Комитета по печати при Совете Министров УССР, Харьков, Донец-Захаржевская, 6/8 на Типоофсетной фабрике «Коммунист» Комитета по печати при Совете Министров УССР, Харьков, Энгельса, 11.

$\frac{2-2-3}{31-72}$

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга, как и ее предыдущие четыре части, предназначена в основном для студентов, которые обучаются по вечерней системе и заочно.

В книгу вошли упражнения по векторному анализу, исчислению матриц и их приложению к решению систем линейных алгебраических уравнений и приведению квадратичной формы к сумме квадратов, а также упражнения по итерационным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений, решение линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

Цель книги — помочь студенту научиться с наименьшей затратой времени самостоятельно решать задачи по этим разделам курса высшей математики.

Весь учебный материал разделен на отдельные практические занятия. Как и в предыдущих четырех частях, перед каждым из занятий помещены основные сведения из теории, а также относящиеся к нему формулы, теоремы и определения.

К упражнениям по теории матриц сведения из теории приведены полнее, чем к практическим занятиям по другим разделам курса. Это связано с тем, что в учебной литературе теории матриц и их приложений уделяется недостаточное внимание, несмотря на их широкое применение в технике и вычислительной практике. Важное место занимает определение собственных значений и собственных векторов матрицы методами акад. А. Н. Крылова и Леверье.

Каждое практическое занятие содержит подробное решение типовых задач различной степени трудности с полным анализом решения. Многие задачи решаются различными способами, а целесообразность этих способов сравнивается.

Кроме этих решенных и разобранных задач, каждое практическое занятие включает большое число задач для самостоятельного решения. Все они снабжены ответами, а многие из них — промежуточными результатами и методическими указаниями. Такое построение книги предоставляет студентам широкие возможности для активной самостоятельной работы.

Студенты, пользующиеся этой книгой, перед каждым практическим занятием должны выучить относящийся к нему раздел теории, разобрать решенные задачи с выполнением всех действий на бумаге и только после этого приступать к задачам, предложенным для самостоятельного решения.

Книга написана так, что она допускает не только последовательное проведение всех практических занятий, но и использование их в выборочном порядке. Например, упражнения по векторному анализу (практические занятия №№ 11, 12, 13 и т. д.) и упражнения по теории матриц (практические занятия №№ 4, 5, 6, 7, 8, 9) можно выполнять независимо друг от друга. Это относится и к упражнениям по решению алгебраических и трансцендентных уравнений, а также дифференциальных уравнений с частными производными.

Автор приносит глубокую благодарность рецензенту этой книги доктору физико-математических наук, профессору Г. М. Баженову и ее ответственному редактору кандидату физико-математических наук, доценту Р. В. Солодовникову, а также кандидату технических наук А. А. Егоршину за ценные советы и замечания, которые способствовали улучшению книги.

Содержание. Численное решение алгебраических уравнений

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Алгебраическое уравнение степени n с действительными коэффициентами

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1,1)$$

имеет n корней, среди которых могут быть действительные различные корни, действительные кратные корни, а также комплексные корни, попарно сопряженные. Если корнями уравнения являются числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то левая часть уравнения может быть представлена в виде

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ \dots\ (x-\alpha_n). \qquad (1,2)$$

Если α—корень уравнения, то левая часть уравнения делится без остатка на $x-\alpha$.

Прежде всего следует найти все действительные корни уравнения, а потом уже его комплексные корни.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

При решении алгебраических уравнений степени выше второй мы будем отыскивать действительные корни методами последовательных приближений с использованием схемы Горнера для деления левой части уравнения на $x-\alpha$, где α — действительный корень уравнения.

В методах последовательных приближений, применяемых при решении уравнений, отыскивается последовательность чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, которая имеет своим пределом число α, являющееся корнем уравнения. Мы будем считать x_n хорошим приближением к корню α, если остаток от деления левой части уравнения на $x-x_n$ достаточно мал.

Схема Горнера для деления многочлена на двучлен $x-\alpha$, а также схема для деления многочлена на квадратный трехчлен x^2+px+q, которая понадобится при определении комплексных корней уравнения, даны ниже.

Сейчас же укажем правило Декарта, согласно которому можно сделать заключение о числе положительных и отрицательных корней алгебраического уравнения.

Если в уравнении (1,1) у двух соседних коэффициентов разные знаки, то говорят, что имеет место перемена знака; если же у двух соседних коэффициентов одинаковые знаки, то говорят, что имеет место сохранение знака. При этом учитываются только коэффициенты, отличные от нуля.

Пример. В уравнении

$$x^5 - 7x^3 - 4x^2 + 5 = 0$$

имеют место две перемены знака (у членов первого и второго, третьего и четвертого и одно постоянство знака у второго и третьего членов).

Если в уравнении (1,1) нет коэффициентов, равных нулю, то оно называется «полным».

Для определения числа положительных и отрицательных корней алгебраического уравнения существует правило Декарта, которое гласит:

Число положительных корней алгебраического уравнения равно числу перемен знака в ряде коэффициентов этого уравнения или на четное число меньше его, причем, равные нулю коэффициенты просто не считаются.

Число отрицательных корней уравнения равно числу перемен знака в ряде коэффициентов уравнения $f(-x) = 0$ или на четное число меньше его.

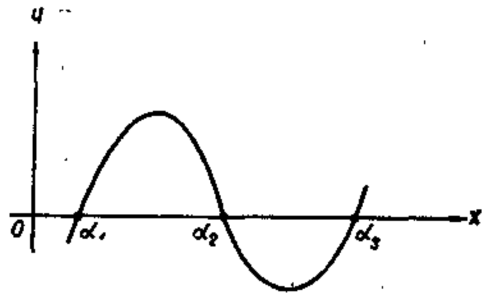
Если уравнение «полное», то число его положительных корней равно числу перемен знака или на четное число меньше его, а число его отрицательных корней равно числу постоянств знака в ряде коэффициентов или меньше его на четное число.

Это правило мы неоднократно будем применять при решении задач.

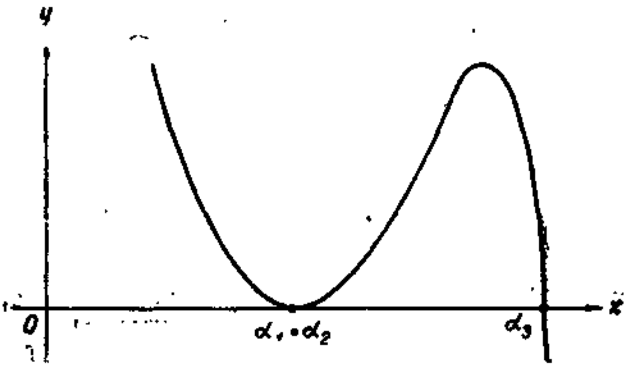
Отделение корней. *Отделением корня уравнения $f(x) = 0$ называется нахождение отрезка $[a, b]$, на концах которого функция принимает значения разных знаков и внутри которого находится только один корень.* Отделив корень, мы получаем возможность в качестве его приближенного значения принять любое число из отрезка $[a, b]$. Отделение действительных корней уравнения $f(x) = 0$ очень удобно производить графически. Значения действительных корней уравнения $f(x) = 0$ являются абсциссами точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox. Чтобы указать отрезки, заключающие только по одному корню уравнения, не требуется особой точности.

Пример. Если график функции имеет вид, указанный на фиг. 1, 1 то уравнение имеет три простых корня. Если какой-либо действительный корень является двукратным, например, $\alpha_1 = \alpha_2$ то кривая $y = f(x)$ касается оси Ox в точке, где $x = \alpha_1$ (фиг. 1, 2).

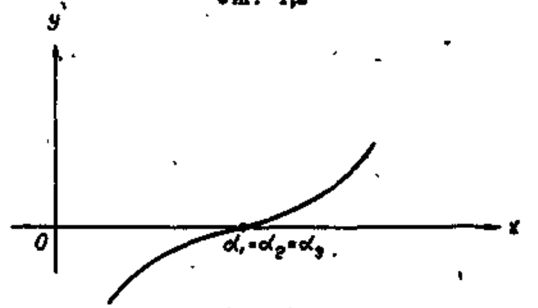
Если имеется трехкратный действительный корень, например, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, то в месте касания с осью кривая $y = f(x)$ имеет точку перегиба (фиг. 1,3).



Фиг. 1,1



Фиг. 1,2



Фиг. 1,3

Графический метод отделения корней должен рассматриваться только как вспомогательное средство при определении приближенного значения корней и большой точности от него ждать нечего. Отделенные графическим методом корни уточняются способами, указанными ниже.

Способ № 1

(Способ Ньютона и его видоизменение *).

В этом способе приближенное значение действительного корня α улучшается по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1,3}$$

(см. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. I, гл. 6, § 2), где через x_n и x_{n+1} обозначены соответственно n-ое и $(n+1)$-ое приближения корня. Эта формула дает возможность по известному n-му приближению корня найти его $(n+1)$-ое приближение.

Чтобы сократить вычисления по формуле (1,3), можно для всех приближений корня удовольствоваться одним и тем же значением производной, стоящей в знаменателе дроби в этой формуле, вычислив ее значение только для первого приближения корня. Способ Ньютона с этим упрощением мы будем называть видоизмененным (модифицированным) способом Ньютона.

Когда применяется способ Ньютона, корень необходимо отделить, т. е. определить отрезок $[a, b]$, в котором находится единственный действительный корень.

За первое приближение корня следует взять значение того конца этого отрезка, на котором знак функции совпадает со знаком ее второй производной.

Способ № 2

(Способ линейной интерполяции и его видоизменение **)

В этом способе для вычисления $(n+1)$-го приближения корня пользуются формулой

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_i}{f(x_n) - f(x_i)} \tag{1,4}$$

(см. например, В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 1, гл. 6, § 2), причем x_n и x_i — значения, между которыми находится искомый корень. Формула (1,4) дает возможность по найденному n-му приближению корня найти его $(n+1)$-ое приближение. В этом способе за первое приближение корня можно принять значение любого из концов отрезка, на котором находится отделенный корень.

Замечание. Значительную экономию вычислительной работы можно получить при помощи этого способа, если значение дроби

$$\frac{x_n - x_i}{f(x_n) - f(x_i)}$$

---

* Этот способ называется также способом касательных.

** Этот способ называется также способом хорд.

в формуле (1,4) брать одним и тем же для всех приближений корня.

Способ, в котором будет применено это упрощение, мы будем называть видоизмененным (модифицированным) способом линейной интерполяции. Часто бывает выгодно одновременно применять способ Ньютона и способ линейной интерполяции.

Способ № 3

для определения приближенного значения наибольшего и наименьшего по абсолютной величине корня алгебраического уравнения.

Если дано уравнение

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (1,5)$$

то его простой, наибольший по абсолютной величине корень можно приближенно найти из уравнения

$$x + a_1 = 0 \qquad (1,6)$$

$x = -a_1$

или из уравнения

$$x^2 + a_1x + a_2 = 0, \qquad (1,7)$$

взяв его больший по абсолютной величине корень.

Укажем, что найденные таким образом приближенные значения окажутся достаточно точными, если наибольший по абсолютной величине корень уравнения (1,5) значительно превосходит остальные корни этого уравнения.

Приближенное значение наименьшего по абсолютной величине корня можно найти из уравнения

$$a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1,8)$$

или из уравнения

$$a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (1,9)$$

взяв его наименьший по абсолютной величине корень. Улучшение корня, найденного по этому способу, можно провести по способу № 1 и № 2 или видоизменениям этих способов, указанным выше, определив отрезок, в котором находится найденный корень.

Способ № 4

В уравнении

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0$$

отбираем три последних члена и решаем квадратное уравнение

$$a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0. \qquad (1,10)$$

1. Если корни этого уравнения действительны, то поступаем так: решаем уравнение

$$a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{1,11}$$

и за первое приближение корня берем

$$x_1 = -\frac{a_n}{a_{n-1}}. \tag{1,12}$$

Левую часть уравнения (1,5) делим на $x - x_1$. Деление проводим по схеме Горнера (см. ниже) до тех пор, пока не останется двучлен вида

$$b_{n-1}x + a_n, \tag{1,13}$$

который не делится без остатка на $x - x_1$. Приравниваем нулю двучлен (1,13) и из уравнения

$$b_{n-1}x + a_n = 0$$

находим второе приближение корня

$$x_2 = -\frac{a_n}{b_{n-1}}. \tag{1,14}$$

Теперь левую часть уравнения (1,14) делим на $x - x_2$ по схеме Горнера и получаем остаток в виде

$$c_{n-1}x + a_n, \tag{1,15}$$

с которым мы поступаем, как с предыдущим: приравниваем его нулю

$$c_{n-1}x + a_n = 0. \tag{1,16}$$

Определяем третье приближение

$$x_3 = -\frac{a_n}{c_{n-1}} \tag{1,17}$$

и снова по схеме Горнера делим левую часть уравнения на $x - x_3$. Обычно этот процесс приводит к ряду значений $x_1, x_2, x_3, \ldots$, приближающихся к искомому корню.

После того как мы остановились на некотором приближении корня x_n и приняли его за искомое значение корня, разделим левую часть уравнения (1,5) на $x - x_n$. Получится многочлен степени на единицу меньшей, чем левая часть данного уравнения. Приравниваем этот многочлен нулю и с полученным новым уравнением поступаем, как было описано выше.

З а м е ч а н и е. При использовании этого способа может случиться, что последовательность чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$ не приближается к искомому корню, т. е. имеет место так называемый расходящийся процесс. Приведем две рекомендации для улучшения вычислений в тех случаях, когда приближение к искомому корню происходит медленно или «колебательно», т. е. не монотонно.

А. Если при определении вещественных корней уравнения (1,5) последовательные значения

$$x_1 = -\frac{a_n}{a_{n-1}}; \quad x_2 = -\frac{a_n}{b_{n-1}}; \quad x_3 = -\frac{a_n}{c_{n-1}}; \ \ldots \tag{1,18}$$

меняются не монотонно, а «колебательно», то следует брать новое приближенное значение корня для следующего деления равным полусумме предыдущего значения и того, которое получается из остатка выполненного деления, т. е. брать в этом случае, например, третье приближение равным

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{a_n}{c_{n-1}}\right). \tag{1,19}$$

Б. Если же при определении вещественных корней значения (1,18) меняются, хотя и не монотонно, но очень медленно, надо следующее, например, третье приближение корня, брать в этом случае в виде

$$x_3 = \frac{x_2 r_1 - x_1 r_2}{r_1 - r_2}, \tag{1,20}$$

где r_1 и r_2 — остатки от деления левой части уравнения (1,5) соответственно на $x - x_1$, и на $x - x_2$.

2. Если окажется, что корни уравнения (1,10) комплексны, то для вычисления пары комплексных сопряженных корней поступаем так: представляем его левую часть в виде трехчлена

$$x^2 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}x + \frac{a_n}{a_{n-2}}. \tag{A}$$

Этот трехчлен будем считать первым приближением к тому трехчлену, из которого мы впоследствии определим пару корней. На этот трехчлен делим левую часть уравнения (1,5), пока не останется трехчлен вида

$$b_{n-2}x^2 + b_{n-1}x + b_n,$$

который уже целиком не делится на (A). В качестве второго приближения выделяемого трехчлена принимаем трехчлен

$$x^2 + \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}x + \frac{b_n}{b_{n-2}} \tag{B}$$

и на него снова делим левую часть уравнения до тех пор, пока не получится остаток вида

$$c_{n-2}x^2 + c_{n-1}x + c_n.$$

За третье приближение выделяемого трехчлена принимаем трехчлен

$$x^2+\frac{c_{n-1}}{c_{n-2}}x+\frac{c_n}{c_{n-2}}. \tag{C}$$

По коэффициентам трехчленов (A), (B) и (C) судим о том, сходится ли этот процесс. Останавливаемся на каком-либо приближении, коэффициенты которого мало отличаются от коэффициентов предыдущего. Если это будет трехчлен

$$x^2+bx+c,$$

то решение уравнения

$$x^2+bx+c=0$$

даст два корня исходного уравнения. На странице 17 указана удобная схема для деления многочлена на квадратный трехчлен, которая значительно облегчит процесс деления. Подробное изложение указанных выше способов можно найти, например, в книге: И. С. Березин и Н. П. Жидков. Методы вычислений, Физматгиз, 1959.

Схема Горнера

Чтобы не отсылать студента к учебникам, где изложен способ Горнера для деления целой рациональной функции

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

на линейный двучлен $x-x_0$, приведем этот вывод здесь.

При делении многочлена

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \text{ на } x-x_0$$

получится в частном многочлен степени $(n-1)$

$$b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1}$$

и остаток r — число, так что

$$\begin{gathered}a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=\\=(x-x_0)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1})+r.\end{gathered} \tag{1,21}$$

Определению подлежат коэффициенты $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ частного и остаток от деления r.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях буквы x в левой и правой частях равенства (1, 21), получим:

$$a_0 = b_0;$$
$$a_1 = -b_0x_0 + b_1;$$
$$a_2 = -b_1x_0 + b_2;$$
$$\dots\dots\dots$$
$$a_n = -b_{n-1}x_0 + r.$$

Решая эти равенства относительно b_0, b_1, b_2, ..., b_{n-1} и r, найдем:

$$b_0 = a_0;$$
$$b_1 = a_0x_0 + a_1;$$
$$b_2 = b_1x_0 + a_2;$$
$$\dots\dots$$
$$b_{n-1} = b_{n-2}x_0 + a_{n-1};$$
$$r = b_{n-1}x_0 + a_n.$$

Эти равенства показывают, что каждый последующий коэффициент b_i получается умножением предыдущего b_{i-1} на x_0 и прибавлением соответствующего коэффициента a_i. Остаток r из b_{n-1} находится также. Вычисления удобно располагать по схеме, в которой принято $a_0 = 1$.

Схема Горнера для деления многочлена

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \text{ на двучлен } x - x_0$$

	$a_0 = 1$	a_1	a_2	a_3	a_4	...	a_{n-1}	a_n
x_0		b_0x_0	b_1x_0	b_2x_0	b_3x_0	...	$b_{n-2}x_0$	$b_{n-1}x_0$
	$b_0 = 1$	b_1	b_2	b_3	b_4	...	b_{n-1}	r

В первую строку вписываем коэффициенты делимого. Из схемы видно, что коэффициенты частного получаются в третьей строке от сложения чисел, стоящих над ними в первой и второй строках.

Приведем пример использования схемы Горнера. Разделим многочлен

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 3x + 2$$

на $x - 3$. У нас $x_0 = 3$.

	1	5	4	—3	2
3		$3 \cdot 1 = 3$	$3 \cdot 8 = 24$	$3 \cdot 28 = 84$	$3 \cdot 81 = 243$
	1	8	28	81	245

Коэффициенты частного равны 1; 8; 28; 81; в частном получаем $x^3 + 8x^2 + 28x + 81$, а остаток $r = 245$. Схемой Горнера удобно пользоваться также для вычисления значений многочлена

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

при $x = x_0$, т. е. значения $f(x_0)$. Вычисление $f(x_0)$ требуется при нахождении корней по способу Ньютона, способу линейной интерполяции и при использовании способа № 4. Следует помнить, что $f(x_0)$ равно остатку от деления многочлена $f(x)$ на $x - x_0$. Так, в приведенном примере значение $f(x)$ при $x = 3$ будет $f(3) = 245$, т. е. равно остатку от деления $f(x)$ на $x - 3$.

Случай кратных действительных корней уравнения

Известно, что если многочлен $f(x)$ последовательно n раз делить на $x - a$, то в остатках будем получать: после первого деления $f(a)$, после второго $f'(a)$, после третьего $\frac{1}{2!}f''(a)$ ..., после n-го деления $\frac{1}{(n-1)!}f^{n-1}(a)$.

Если α_1 — корень кратности k уравнения (1,1), то не только $f(\alpha_1) = 0$, но и $f'(\alpha_1) = 0$; $f''(\alpha_1) = 0$ ...; $f^{(k-1)}(\alpha_1) = 0$.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16 = 0.$$

Разделим $f(x)$ на $x - 4$ по схеме Горнера:

Первое деление	1	—9	24	—16
4		4	—20	+16
Второе деление	1	—5	4	$0 = f(4)$
4		4	—4	
	1	—1	$0 = f'(4)$	

(остаток от деления; 0 есть значение функции при $x = 4$).

Поскольку не только $f(4) = 0$, но и $f'(4) = 0$, то $x = 4$ есть двукратный корень нашего уравнения. Частное от деления $f(x)$ на $(x-4)^2$ равно $x-1$, а его коэффициенты 1 и -1 находятся на последней строке. Поэтому третий корень уравнения получим из уравнения

$$x - 1 = 0; \quad x = 1.$$

Случай, когда уравнение имеет два близких корня

В способе № 1 (способ Ньютона) употребляется формула (1,3)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Если уравнение имеет два близких по величине корня, то знаменатель дроби в формуле (1,3) будет мало отличаться от нуля, что повлечет за собой резкое изменение правой части этой формулы при изменении x. В этом случае следует решить уравнение $f'(x) = 0$, найти его корень a и разложить $f(x)$ по степеням $x-a$, сохраняя в разложении только члены с $x-a$ и $(x-a)^2$, т. е. разложение функции $f(x)$ представить в виде

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

и рассмотреть уравнение $f(x) = 0$, или

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 = 0.$$

Так как a есть корень уравнения $f'(x) = 0$, то $f'(a) = 0$ и последнее уравнение запишется в виде

$$f(a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 = 0,$$

а отсюда

$$\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 = -f(a);$$

$$(x-a)^2 = -\frac{f(a)}{\frac{1}{2}f''(a)};$$

$$x - a = \pm\sqrt{-\frac{f(a)}{\frac{1}{2}f''(a)}};$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a + \sqrt{-\frac{f(a)}{\frac{1}{2}f''(a)}} \\ x_2 &= a - \sqrt{-\frac{f(a)}{\frac{1}{2}f''(a)}} \end{aligned}\right\}. \qquad (1,22)$$

Этими соображениями мы будем пользоваться всякий раз, когда понадобится определить два близких между собой корня.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

После того как определены все действительные корни алгебраического уравнения, следует приступить к определению его комплексных корней.

Пусть найденные действительные корни уравнения (1,5) есть числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ ($k < n$, если $k = n$, то решение закончено).

Разделим левую часть $f(x)$ уравнения (1,5) на произведение

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_k).$$

В частном получится многочлен $\varphi(x)$ степени $n-k$

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_k)}.$$

Деление следует проводить по схеме Горнера, разделив сначала $f(x)$ на $x-\alpha_1$, затем полученное частное — на $x-\alpha_2$ и т. д.

Так как все вещественные корни уже найдены, то уравнение

$$\varphi(x) = 0$$

вещественных корней не имеет, а потому степень $n-k$ многочлена $\varphi(x)$ будет обязательно четной. Пусть $n-k=2l$, а многочлен $\varphi(x)$ записывается так:

$$\varphi(x) = x^{2l} + d_1x^{2l-1} + d_2x^{2l-2} + \cdots + d_{2l-2}x^2 + d_{2l-1}x + d_{2l} = 0. \tag{1,22а}$$

Для определения пары комплексных корней $\varphi(x)$ следует выделить квадратный трехчлен, являющийся делителем $\varphi(x)$. Этот делитель в первом приближении принимаем равным

$$x^2 + \frac{d_{2l-1}}{d_{2l-2}}x + \frac{d_{2l}}{d_{2l-2}} \tag{1,23}$$

и делим на него многочлен $\varphi(x)$ до тех пор, пока не останется трехчлен вида

$$ex^2 + fx + k, \tag{1,24}$$

не делящийся на трехчлен (1,23).

Трехчлен

$$x^2 + \frac{f}{e}x + \frac{k}{e}, \tag{1,25}$$

полученный из предыдущего делением всех его членов на e, принимаем за второе приближение выделяемого трехчлена. Теперь делим $\varphi(x)$ на (1,25) до тех пор, пока не получится трехчлен вида

$$e_1x^2 + f_1x + k_1,$$

уже не делящийся целиком на (1,25).

Из этого трехчлена делением всех членов на e_1 получаем трехчлен

$$x^2 + \frac{f_1}{e_1}x + \frac{k_1}{e_1}, \tag{1,26}$$

который принимаем за третье приближение выделяемого трехчлена. Обычно уже на третьем, четвертом шаге мы получим хорошее приближение в виде трехчлена

$$x^2 + \frac{f_l}{e_l}x + \frac{k_l}{e_l},$$

приравниваем его нулю и находим пару комплексных корней.

Мы остановимся на том приближении, коэффициенты которого мало отличаются от предыдущего. Разделив $\varphi(x)$ на (1,26) (собственно, частное уже получено в последнем делении), получим многочлен степени на 2 меньшей, чем $\varphi(x)$, и с ним поступаем точно так же, как и с $\varphi(x)$.

З а м е ч а н и е. Если вычисления при определении комплексных корней сходятся плохо, надо многочлен (1,22а) преобразовать заменой $x = \frac{1}{z}$ в многочлен

$$\varphi\left(\frac{1}{z}\right) = \varphi_1(z) = \frac{1}{z^{2l}} + d_1\frac{1}{z^{2l-1}} + d_2\frac{1}{z^{2l-2}} + \cdots + d_{2l-1}\frac{1}{z} + d_{2l}$$

или

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{z^{2l}}(1 + d_1z + d_2z^2 + \cdots + d_{2l-1}z^{2l-1} + d_{2l}z^{2l})$$

и рассмотреть уравнение

$$\varphi_1(z) = 0. \tag{1,27}$$

Корни уравнения $\varphi(x) = 0$ будут обратными величинами корней последнего уравнения (1,27).

Схема для деления многочлена на квадратный трехчлен

Укажем теперь удобную схему для деления многочлена на трехчлен вида $x^2 + px + q$. Пусть

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = \\ &= (x^2 + px + q)(b_0x^{n-2} + b_1x^{n-3} + b_2x^{n-4} + \cdots + b_{n-3}x + b_{n-2}) + \\ &\quad + b_{n-1}x + b_n. \end{aligned}$$

Коэффициенты $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}, b_{n-1}, b_n$ находят по схеме, которая легко получится, если, как и в схеме Горнера, сравнить коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и в правой частях предыдущего равенства.

Схема имеет такой вид:

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
$-p$		$-pb_0$	$-pb_1$	$-pb_2$	$-pb_3$	$\cdots$	$-pb_{n-3}$	$-pb_{n-2}$	
$-q$			$-qb_0$	$-qb_1$	$-qb_2$	$\cdots$	$-qb_{n-4}$	$-qb_{n-3}$	$-qb_{n-2}$
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdots$	b_{n-2}	b_{n-1}	b_n

В первую строку записываются коэффициенты многочлена $f(x)$. Коэффициент частного $b_0 = a_0$. Образование чисел второй и третьей строки ясно из схемы. Искомые коэффициенты получаются как сумма чисел, стоящих в одном и том же столбце.

Так как в описываемом способе мы делим до тех пор, пока не останется многочлен вида

$$ex^2 + fx + k,$$

то с помощью этой схемы коэффициенты e, f и k можно получить так:

коэффициент e — это b_{n-2} в третьем столбце схемы, считая справа;

коэффициент f получится в предпоследнем столбце, если не вписывать в него произведение $-pb_{n-2}$;

коэффициент k равен a_n — свободному члену уравнения. Иначе говоря,

$$e = b_{n-2};\ f = b_{n-1} + pb_{n-2};\ k = a_n.$$

Приводим пример деления по этой схеме многочлена

$$f(x) = 5x^6 + 3x^5 - x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 4x + 8 \text{ на } x^2 + 7x + 8$$

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	5	3	−1	5	−3	4	8
−7		−35	224	−1281	7140	−39711	
−8			−40	+256	−1464	8160	−45384
	5	−32	183	−1020	5673	−31547	−45376
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6

Итак, частное от деления равно $5x^4 - 32x^3 + 183x^2 - 1020x + 5673$, а остаток равен $-31547x - 45376$.

Если же производить деление до получения в остатке интересующего нас квадратного трехчлена вида $ex^2 + fx + k$, то он окажется равным $5673x^2 + 8164x + 8$, причем $8164 = 8160 + 4$ (8160 — выделено жирным шрифтом), а 8 — свободный член (мы сознательно привели несколько громоздкий пример).

Проверка решения

Проверку всех найденных корней следует произвести, пользуясь известными свойствами корней алгебраического уравнения (формулы Виета).

Сумма всех корней алгебраического уравнения (1,1)

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_1}{a_0}, \qquad (1,28)$$

а их произведение

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \ldots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}. \qquad (1,29)$$

После этих указаний приступим к решению задач. Рекомендуется пользоваться при этом арифмометром или любой клавишной вычислительной машиной.

Задача 1,1. Решить уравнение

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 0{,}092$$

(с точностью 0,001).

Решение. Используя правило Декарта (стр. 6), заключаем, что положительных корней будет два или ни одного, так как у нас две перемены знака ($+ - + +$), отрицательный же корень только один, поскольку уравнение «полное» (коэффициентов, равных нулю, в уравнении нет), а число сохранений знака одно в последних двух коэффициентах: $+\ +$ (см. стр. 6). Будем пользоваться указаниями способа № 3 для определения наибольшего по абсолютной величине корня.

Составляем квадратное уравнение вида (1,7). У нас $a_1 = -5$; $a_2 = 4$ и это уравнение имеет вид

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Решая его, находим

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4};$$

$$x_1 = 4; \qquad x_2 = 1.$$

Принимаем $x_1 = 4$ за первое приближение наибольшего корня, Теперь мы должны отделить корень (см. стр. 6). Делим $f(x)$ на $x - 4$ по схеме Горнера (стр. 13):

	1	—5	4	0,092
4		4	—4	0
	1	—1	0	$0{,}092 = f(4)$

(остаток от деления 0,092 есть значение левой части уравнения при $x=4$)

У нас $f(4) = 0{,}092 > 0$. Возьмем $x = 3{,}9$. Разделив теперь $f(x)$ на $x - 3{,}9$, получим

	1	—5	4	0,092
3,9		3,9	—4,29	—1,131
	1	—1,1	—0,29	$-1{,}039 = f(3{,}9)$

(остаток от деления —1,039 есть значение левой части уравнения при $x = 3{,}9$)

и $f(3{,}9) = -1{,}039 < 0$.

Значит, $f(3{,}9) < 0$, а $f(4) > 0$ и корень содержится между 3,9 и 4. Из рассмотрения остатков деления 0,092 и —1,039 заключаем, что искомый корень ближе к 4, чем к 3,9. Уточним корень линейной интерполяцией (способ № 2).

Второе приближение корня получим по формуле (1,4), которая для нашего случая запишется так:

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_l}{f(x_1) - f(x_l)}.$$

Здесь x_1 и x_l — концы отрезка [3,9; 4], в котором находится корень. В формулу (1,4) подставим

$$x_1 = 4; \quad x_l = 3{,}9;$$

$$f(x_1) = f(4) = 0{,}092; \text{ а } f(x_l) = f(3{,}9) = -1{,}039;$$

$$x_2 = 4 - \frac{0{,}092 \cdot (4 - 3{,}9)}{0{,}092 - (-1{,}039)};$$

$$x_2 = 4 - \frac{0{,}0092}{1{,}131};$$

$$x_2 = 4 - 0{,}008 = 3{,}992.$$

Значит, вторым приближением корня будет $x_2 = 3{,}992$.

Разделим теперь $f(x)$ на $x - 3,992$ по схеме Горнера:

	1	—5	4	0,092
3,992		3,992	—4,024	—0,095
	1	—1,008	—0,024	$-0,003 = f(3,992)$

(A)

Остаток от деления получился значительно меньшим ($r = -0,003$ вместо $-1,039$ в предыдущем делении). Испробуем значение $x = 3,993$. Разделим $f(x)$ на $x - 3,993$:

	1	—5	4	0,092
3,993		3,993	—4,021	—0,083
	1	—1,007	—0,021	$0,009 = f(3,993)$

От деления получился положительный остаток $r = 0,009$. Значит, $f(3,993) > 0$, а $f(3,992) < 0$. Отсюда заключаем, что значение искомого корня уравнения промежуточное — между 3,992 и 3,993. Ограничиваясь тремя знаками, принимаем $x = 3,992$.

Считая, что x находится на отрезке [3,992; 3,993], мы допускаем погрешность, меньшую 0,001.

В схеме (A) уже имеются коэффициенты частного от деления $f(x)$ на $x - 3,992$. Эти коэффициенты равны 1; $-1,008$ и $-0,024$, а само частное равно $x^2 - 1,008x - 0,024$. Приравнивая его нулю и решая квадратное уравнение

$$x^2 - 1,008x - 0,024 = 0,$$

получим (при решении пользуйтесь таблицами для извлечения квадратных корней)

$$x = 0,504 \pm \sqrt{0,254 + 0,024};$$

$$x = 0,504 \pm \sqrt{0,278};$$

$$x = 0,504 \pm 0,527 = \begin{cases} 1,031; \\ -0,023. \end{cases}$$

Итак, корни уравнения равны

$$x_1 = -0,023; \ x_2 = 1,031; \ x_3 = 3,992.$$

Количество полученных отрицательных и положительных корней уравнения соответствуют тому, которое было определено на основании правила Декарта (см. начало решения). После того как корни найдены, их следует располагать в порядке возрастания.

Проверка. $x_1 + x_2 + x_3 = -0{,}023 + 1{,}031 + 3{,}992 = 5$, как и должно быть на основании формулы (1,28), так как у нас

$$-\frac{a_1}{a_0} = 5 \quad (a_0 = 1;\ a_1 = -5).$$

На основании формулы (1,29)

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

$n = 3$; $a_n = 0{,}092$ и должно получиться, что $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -0{,}092$. Фактически же мы получаем $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -0{,}096$, что следует признать достаточно хорошим приближением. Мы получили $x_2 = 1{,}031$. Точным значением корня является $x_2 = 1{,}03$.

Значение наименьшего по абсолютной величине корня $x = -0{,}023$ можно было бы найти сразу, решив уравнение вида (1,11)

$$a_{n-1}x + a_n = 0.$$

В нашем случае это уравнение запишется так:

$$4x + 0{,}092 = 0.$$

Отсюда $x = -0{,}023$.

Проверим этот корень делением левой части уравнения на $x + 0{,}023$:

	1	—5	4	0,092
—0,023		—0,023	+0,116	—0,094
	1	—5,023	4,116	$-0{,}002 = f(-0{,}023)$
				(остаток от деления)

Поскольку остаток от деления мал, заключаем, что это хорошее приближение.

Задача 1,2. Найти с точностью до 0,001 корни уравнения

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 13 = 0.$$

Решение. По правилу Декарта заключаем, что положительных корней два или их вовсе нет, так как в ряде коэффициентов уравнения две перемены знака. Отрицательный же корень один, поскольку число сохранения знака в ряде коэффициентов равно 1.

Начнем с определения наибольшего по абсолютной величине корня (способ № 3, прочтите его!). Для этого составляем квадратное уравнение (1,7), в котором $a_1 = -4$, $a_2 = -7$.

Уравнение (1,7) принимает вид

$$x^2 - 4x - 7 = 0.$$

Отсюда $x = 2 \pm \sqrt{4+7}$;

$$x = 2 \pm \sqrt{11} = \begin{cases} +5,317 \\ -1,317, \end{cases}$$

так как $\sqrt{11} = 3,317$.

Поскольку нас интересует больший по абсолютной величине корень, берем $x = 5,317$ и будем считать 5,317 первым приближенным значением корня. Теперь определим отрезок, на котором находится корень, т. е. отделим корень. Разделив по схеме Горнера левую часть данного уравнения на $x - 5,317$, получим

	1	—4	—7	13
5,317		5,317	7,002	0,011
	1	1,317	0,002	13,011 = f(5,317) (остаток от деления)

Остаток от деления 13,011 и есть значение левой части уравнения при $x = 5,317$. Возьмем теперь значение меньшее, чем 5,317, например, $x = 5$, и для определения $f(5)$ разделим левую часть уравнения на $x - 5$. Пользуясь схемой Горнера, получим

	1	—4	—7	13
5		5	5	—10
	1	1	—2	3 = f(5) (остаток от деления)

Теперь остаток от деления равен 3 и $f(5) = 3$. Возьмем значение меньшее, чем 5, например $x = 4,8$, и разделим $f(x)$ на $x - 4,8$;

	1	—4	—7	13
4,8		4,8	3,84	—15,168
	1	0,8	—3,16	—2,168 = f(4,8) (остаток от деления

Остаток от деления равен —2,168. Остаток поменял знак. Значение левой части уравнения при $x = 4,8$ будет $f(4,8) = -2,168$. Поскольку $f(5) = 3 > 0$, а $f(4,8) = -2,168 < 0$, т. е. значения левой части данного уравнения на концах отрезка [4,8; 5] имеют различные знаки, искомый корень находится именно на этом отрезке. Уточним значение корня по способу № 2 линейной интерполяции. Это удобно сделать именно этим способом, так как все величины, входящие в формулу (1,4), уже вычислены. Принимаем за первое приближение корня $x_1 = 4,8$. У нас $x_i = 5$; $x_1 = 4,8$; $f(x_i) = 3$; $f(x_1) = -2,168$, и мы получаем второе приближение корня по формуле (1,4)

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \frac{x_1 - x_i}{f(x_1) - f(x_i)}$$

или, подставляя числа, будем иметь

$$x_2 = 4{,}8 - (-2{,}168) \cdot \frac{4{,}8 - 5}{-2{,}168 - 3}.$$

Значение дроби

$$\frac{4{,}8 - 5}{-2{,}168 - 3} = \frac{-0{,}2}{-5{,}168} = 0{,}039 \qquad \text{(A)}$$

и $x_2 = 4{,}8 + (2{,}168) \cdot (+0{,}039) = 4{,}8 + 0{,}084 = 4{,}884$. Итак, второе приближение корня $x_2 = 4{,}884$.

Вычислим теперь значение левой части нашего уравнения при $x = 4{,}884$. Вычисление производим по способу Горнера, путем деления левой части уравнения на $x - 4{,}884$:

	1	—4	—7	13
4,884		4,884	4,317	—13,104
	1	0,884	—2,863	—0,104 = f(4,884) (остаток от деления)

Остаток от деления $r = -0{,}104$, а потому значение левой части уравнения при $x = 4{,}884$ будет $f(4{,}884) = -0{,}104$. Теперь отрезок, на котором находится корень, сузился. Этот отрезок [4,884; 5], и мы имеем $f(4{,}884) = -0{,}104 < 0$, а $f(5) = 3 > 0$. Тем же способом найдем и третье приближение по формуле (1,4)

$$x_3 = x_2 - f(x_2) \frac{x_2 - x_l}{f(x_2) - f(x_l)}.$$

Здесь у нас $x_2 = 4{,}884$; по-прежнему $x_l = 5$;

$$f(x_2) = f(4{,}884) = -0{,}104; \quad f(x_l) = f(5) = 3.$$

Подставляя эти значения в последнюю формулу, будем иметь

$$x_3 = 4{,}884 - (-0{,}104) \cdot \frac{4{,}884 - 5}{-0{,}104 - 3}.$$

Значение дроби

$$\frac{4{,}884 - 5}{-0{,}104 - 3} = \frac{-0{,}116}{-3{,}104} = 0{,}037 \qquad \text{(B)}$$

(при вычислении x_2 — второго приближения аналогичная дробь была равна 0,039); $x_3 = 4{,}884 - (-0{,}104) \cdot (0{,}037)$; $x_3 = 4{,}884 + 0{,}004$; $x_3 = 4{,}888$, т. е. третье приближение корня будет $x_3 = 4{,}888$.

Вычислим теперь значение левой части уравнения при $x = 4{,}888$. Воспользуемся снова схемой Горнера. Разделив левую часть уравнения на $x - 4{,}888$, получим

	1	—4	—7	13	
4,888		4,888	4,340	—13,002	(C)
	1	0,888	—2,660	$-0{,}002 = f(4{,}888)$ (остаток от деления)	

Теперь остаток от деления изменился с —0,104 в предыдущем делении до —0,002, и значение левой части данного уравнения при $x = 4{,}888$ будет $f(4{,}888) = -0{,}002$.

Так как остаток от деления мал, испытаем значение на 0,001 большее, чем третье приближение, т. е. $x = 4{,}889$. Если окажется, что левая часть уравнения при $x = 4{,}889$ будет положительной, то искомый корень лежит на отрезке [4,888; 4,889]. Выполняем деление левой части уравнения на $x - 4{,}889$:

	1	—4	—7	13
4,889		4,889	4,346	—12,975
	1	0,889	—2,654	$0{,}025 = f(4{,}889)$

Мы получили $f(4{,}889) = 0{,}025 > 0$, а так как $f(4{,}888) = -0{,}002 < 0$, то искомый корень действительно находится на отрезке [4,888; 4,889], и мы достигли требуемой точности, так как длина этого отрезка равна 0,001. Принимаем $x = 4{,}888$.

Вычисления можно было бы сократить, если бы при определении третьего приближения вместо значения дроби (B), равного 0,037, мы взяли значение дроби (A), равное 0,039, которое уже было вычислено при определении второго приближения (см. замечание к способу № 2). Тогда мы сразу получили бы $x_3 = x_2 - f(x_2) \times 0{,}039$, т. е. $x_3 = 4{,}884 - (-0{,}104) \cdot 0{,}039 = 4{,}884 + 0{,}004$; $x_3 = 4{,}888$, как и прежде, но вычислительная работа сократилась бы значительно.

Теперь покажем, как тот же корень можно определить по способу касательных (способ № 1 Ньютона).

Было установлено, что корень находится на отрезке [4,8; 5]. У нас $f(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 13$. Значит, $f'(x) = 3x^2 - 8x - 7$, а $f''(x) = 6x - 8$.

В способе Ньютона за первое приближение корня принимается значение того конца отрезка, заключающего корень, на котором знак функции такой же, как и знак ее второй производной. Вторая производная $f''(x)$ положительна на всем отрезке [4,8; 5], а функция $f(x)$ положительна на правом конце этого отрезка ($f(5) > 0$), и за первое приближение корня следует взять $x = 5$. По формуле (1,3)

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

У нас $x_1 = 5$: уже было найдено, что $f(x_1) = f(5) = 3$, а $f'(x_1) = f'(5) = 3 \cdot 5^2 - 8 \cdot 5 - 7 = 75 - 40 - 7 = 28$; $f'(x_1) = 28$ (ввиду простоты вычислений схемой Горнера мы не пользовались).

Итак,

$$x_2 = 5 - \frac{3}{28} = 5 - 0{,}107 = 4{,}893.$$

Для следующего применения формулы (1,3) надо вычислить значение левой части уравнения при $x = 4{,}893$. Пользуясь схемой Горнера, разделим левую часть уравнения на $x - 4{,}893$:

	1	—4	—7	13
4,893		4,893	+4,369	—12,873
	1	0,893	—2,631	$0{,}127 = f(4{,}893)$ (остаток от деления)

Так как остаток от деления равен 0,127, то $f(4{,}893) = 0{,}127$. Вычислим теперь $f'(4{,}893)$. Для этого разделим $f'(x) = 3x^2 - 8x - 7$ на $x - 4{,}893$. Остаток от деления даст $f'(4{,}893)$:

	3	—8	—7
4,893		14,679	+32,680
	3	+6,679	$+25{,}680 = f'(4{,}893)$

и так как остаток от деления равен +25,680, то $f'(4{,}893) = 25{,}680$. По формуле (1,3)

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)};$$

$$x_3 = 4{,}893 - \frac{0{,}127}{+25{,}680} = 4{,}893 - 0{,}005 = 4{,}888.$$

Мы получили то же, что и раньше. Можно было бы воспользоваться указанием на возможную модификацию способа № 1 (стр. 8) и принять при вычислении третьего приближения знаменатель дроби в формуле (1,3) $f'(x_2)$ таким же, каким он был при вычислении второго приближения, т. е. равным $f'(x_1) = 28$.

Приводим вычисления дробей $\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$ и $\frac{f(x_2)}{f'(x_1)}$.

В первом случае $\frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \frac{0{,}127}{25{,}680} = 0{,}00494$.

Во втором случае $\frac{f(x_2)}{f'(x_1)} = \frac{0{,}127}{28} = 0{,}00454$.

Если округлить полученные дроби до трех знаков после запятой, то в обоих случаях получим 0,005. При решении этого примера мы убедились в выгодности применения модификаций способа Ньютона и способа линейной интерполяции. Повторяем, что, применяя способ Ньютона с целью сокращения вычислений в формуле (1,3), значение знаменателя $f'(x_n)$ можно принимать одним и тем же при вычислении всех приближенных значений корня, а, пользуясь способом линейной интерполяции, можно при вычислении всех приближенных значений корня в формуле (1,4) принимать одним и тем же значение дроби

$$\frac{x_n - x_l}{f(x_n) - f(x_l)}.$$

Теперь уже определим остальные два корня нашего уравнения. Из таблицы (С) видно, что частное от деления левой части уравнения на $x - 4{,}888$ имеет коэффициенты 1; 0,888 и $-2{,}660$ (в таблице (С) они подчеркнуты). Поэтому искомое частное будет равно $x^2 + 0{,}888x - 2{,}660$. Приравниваем его нулю и решаем квадратное уравнение

$$x^2 + 0{,}888x - 2{,}660 = 0;$$

$$x = -0{,}444 \pm \sqrt{0{,}197 + 2{,}660};$$

$$x = -0{,}444 \pm \sqrt{2{,}857};$$

$$x = -0{,}444 \pm 1{,}690 = \begin{cases} -2{,}134 \\ 1{,}246; \end{cases}$$

$$x_1 = -2{,}134 \text{ и } x_2 = 1{,}246.$$

Итак, $x_1 = -2{,}134$; $x_2 = 1{,}246$ и $x_3 = 4{,}888$. Здесь снова подчеркнем, что количество положительных и отрицательных корней, полученных при решении, соответствует тому, которое следует из правила Декарта.

Проверка.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4,$$

что и должно быть в соответствии с формулой (1,28), так как у нас $a_1 = -4$; $a_0 = 1$.

Вычислив затем произведение корней, получим $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -12{,}997$ вместо -13, что также следует признать хорошим результатом — см. формулу (1,29): $n = 3$; $a_n = 13$; $a_0 = 1$.

Это же уравнение

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 13 = 0$$

решим по способу № 4.

1. Составляем квадратное уравнение вида (1,10). У нас $a_{n-2} = -4$; $a_{n-1} = -7$; $a_n = 13$, и это уравнение запишется так:

$$-4x^2 - 7x + 13 = 0,$$

или

$$4x^2 + 7x - 13 = 0.$$

2. Корни этого уравнения действительны, а потому решаем уравнение вида (1,11), в котором $a_{n-1} = -7$; $a_n = 13$, само уравнение имеет вид $-7x + 13 = 0$, а $x = 1{,}857$.

Это значение x примем за первое приближение к искомому корню и обозначим его через x_1. Делим левую часть уравнения на $x-1,857$, пользуясь схемой Горнера, и получаем

	1	—4	—7	13
1,857		1,857	—3,980	
	1	—2,143	$\underbrace{-10,980}_{b_{n-1}}$	13

Составляем уравнение вида (1,13), в котором $b_{n-1}=-10,980$ и по-прежнему $a_n=13$. Получаем $-10,980x+13=0$, откуда вторым приближением искомого корня будет $x=1,184$. Делим теперь левую часть уравнения на $x-1,184$, пользуясь опять-таки схемой Горнера:

	1	—4	—7	13
1,184		1,184	—3,334	
	1	—2,816	$\underbrace{-10,334}_{c_{n-1}}$	13

Составляем теперь уравнение вида (1,16), в котором будет $c_{n-1}=-10,334$ и по-прежнему $a_n=13$. Получаем $-10,334x+$ $+13=0$; $x=1,257$. Это и будет третьим приближением корня.

Делим теперь левую часть уравнения на $x-1,257$;

	1	—4	—7	13
1,257		1,257	—3,448	
	1	—2,743	$\underbrace{-10,448}_{d_{n-1}}$	13

Уравнение для определения следующего приближения имеет вид $-10,448x+13=0$ и четвертое приближение корня $x_4=1,244$.

Разделим левую часть уравнения на $x-1,244$:

	1	—4	—7	13
1,244		1,244	—3,428	
	1	—2,756	$\underbrace{-10,428}_{e_{n-1}}$	

и уравнение для получения следующего приближения запишется так:

$$-10,428x+13=0; \quad x_5=1,246.$$

На следующем шаге мы найдем — то же значение x (проверьте!), а потом на найденном значении и остановимся. Этот же корень был получен и раньше. Способ № 4, которым мы только что пользовались, очень прост и доступен.

Задача 13. Найти корни уравнения $f(x) = x^3 - 10x^2 + 44x + 29 = 0$ с точностью до 0,0001.

Решение. Используя правило Декарта, заключаем, что уравнение имеет точно один отрицательный корень, так как в ряде коэффициентов уравнения, ни один из которых не равен нулю, число сохранений знака равно единице (у двух последних коэффициентов).

Желая определить приближенное значение наименьшего по абсолютной величине корня, решим, согласно способу № 3, уравнение (1,8). У нас $a_{n-1} = 44$; $a_n = 29$ и уравнение (1,8) запишется в виде

$$44x + 29 = 0,$$
$$x = -0{,}66.$$

Теперь определим интервал, в котором находится искомый корень. Разделим левую часть уравнения на $x + 0{,}66$ и определим остаток от деления:

	1	−10	44	29	
−0,66		−0,66	7,04	−33,69	(A)
	1	−10,66	51,04	$\underbrace{-4{,}69 = f(-0{,}66)}_{\text{(остаток от деления)}}$	

Отсюда заключаем, что значение левой части уравнения при $x = -0{,}66$ будет равно −4,69, т. е. $f(-0{,}66) = -4{,}69$.

Возьмем $x = -0{,}56$ и вычислим значение $f(-0{,}56)$. Делим $f(x)$ на $x + 0{,}56$, снова применяя схему Горнера:

	1	−10	44	29	
−0,56		−0,56	5,91	−27,95	(B)
	1	−10,56	49,91	$\underbrace{1{,}05 = f(-0{,}56)}_{\text{(остаток от деления)}}$	

Теперь, сравнивая $f(-0{,}66) = -4{,}69$ и $f(-0{,}56) = 1{,}05$, замечаем, что значения левой части уравнения на концах отрезка $[-0{,}66;\ -0{,}56]$ имеют противоположные знаки. Следовательно, искомый корень находится на этом отрезке. Значение корня уточним по способу № 2 линейной интерполяции. Первым приближением корня будем считать $x = -0{,}56$ и воспользуемся формулой (1,4):

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_l}{f(x_1) - f(x_l)}.$$

У нас $x_1 = -0{,}56$; значение $f(x_1)$ уже подсчитано. Это остаток от деления в таблице (B): $f(x_1) = 1{,}05$; $x_l = -0{,}66$, а $f(x_l) = -4{,}69$ — остаток от деления в таблице (A).

Подставляя эти значения в предыдущую формулу, имеем

$$x_2 = -0{,}56 - 1{,}05\frac{-0{,}56 - (-0{,}66)}{1{,}05 - (-4{,}69)},$$

$$x_2 = -0{,}56 - 1{,}05\frac{0{,}10}{5{,}74}.$$

Значение дроби

$$\frac{0{,}10}{5{,}74} = 0{,}0174. \qquad (C)$$

Этим значением нам придется пользоваться при вычислении следующих приближений, так как мы намерены применить способ № 2 в его модифицированном виде.

Итак,

$$x_2 = -0{,}56 - 1{,}05 \cdot (0{,}0174) = -0{,}56 - 0{,}0183; \quad x_2 = -0{,}5783.$$

Разделим теперь левую часть уравнения на $x + 0{,}5783$ и определим остаток от деления. Пользуясь схемой Горнера, получаем

	1	—10	44	29
—0,5783		—0,5783	6,1174	—28,9829
	1	—10,5783	50,1174	0,0171 = f (0,5783) (остаток от деления)

Остаток от деления 0,0171 достаточно мал. Значит, мы уже близко подошли к искомому корню.

Так как мы ищем корень с точностью до 0,0001, то прежде чем переходить к следующему приближению, полезно испробовать $x = -0{,}5784$, отличающееся от предыдущего на —0,0001. Разделим левую часть уравнения на $x + 0{,}5784$ и определим остаток от деления. Если он окажется противоположным по знаку предыдущему остатку, то цель достигнута.

	1	—10	44	29	
—0,5784		—0,5784	6,1185	—28,9895	(D)
	1	—10,5784	50,1185	0,0115 = f (—0,5784)	

Наши ожидания не оправдались, так как остаток не поменял знака. Но очевидно, что значение $x = -0{,}5784$ является лучшим приближением, чем значение $x = -0{,}5783$, поскольку остаток уменьшился. Вычисление следующего приближения по формуле (1,4) приведет нас к

$$x_3 = x_2 - f(x_2)\,\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)},$$

но значение дроби в правой части возьмем равным дроби (C), т. е. 0,0174. У нас $x_2 = -0{,}5784$; $f(x_2)$ есть остаток от деления $f(x)$ на $x + 0{,}5784$. В таблице (D) он уже вычислен и равен $+0{,}0115$ и $f(-0{,}5784) = +0{,}0115$.

Для x_3 получаем

$$x_3 = -0{,}5784 - 0{,}0115 \cdot 0{,}0174,$$

$$x_3 = -0{,}5784 - 0{,}0002; \quad x_3 = -0{,}5786.$$

Разделим теперь левую часть уравнения на $x + 0{,}5786$ и определим остаток от деления:

	1	−10	44	29
−0,5786		−0,5786	6,1208	−28,9999
	1	−10,5786	50,1208	0,0001 = $f(-0{,}5786)$ (остаток от деления)

(E)

Итак, $f(-0{,}5786) = 0{,}0001 > 0$. Вычислите самостоятельно остаток от деления левой части уравнения на $x + 0{,}5787$. У вас получится $-0{,}0055$, т. е. $f(-0{,}5787) = -0{,}0055 < 0$, на концах отрезка $[-0{,}5787; -0{,}5786]$ функция $f(x)$ имеет разные знаки. Так как величина $-0{,}5786$ отличается от $-0{,}5787$ на 0,0001, то требуемая точность достигнута. Принимаем $x = -0{,}5786$.

Применим теперь для отыскания того же корня способ Ньютона (способ № 1) в модифицированном виде, т. е. в формуле (1,3) знаменатель дроби $f'(x_n)$ будем считать одним и тем же для всех приближений.

Корень у нас уже отделен, и мы знаем, что он находится на отрезке $[-0{,}66; -0{,}56]$. В способе Ньютона, как указывалось, за первое приближение корня следует принять тот конец этого отрезка, на котором знак функции и знак второй производной одинаковы. Находим вторую производную от левой части уравнения.

$$f(x) = x^3 - 10x^2 + 44x + 29.$$

Первая производная

$$f'(x) = 3x^2 - 20x + 44,$$

а $f''(x) = 6x - 20$. На отрезке $[-0,66; \ -0,56]$ $f''(x)$ всюду отрицательна. Функция же $f(x)$ отрицательна на левом конце этого отрезка. Следовательно, совпадение знака функции со знаком второй производной происходит на левом конце отрезка, а потому за первое приближение к искомому корню принимаем $x_1 = -0,66$. В таблице (А) уже вычислено значение $f(x_1) = f(-0,66) = -4,69$. Теперь следует найти $f'(x_1) = f'(-0,66)$ и сохранить его значение для всех последующих приближений, так как мы используем способ Ньютона в модифицированном виде. Делением $f'(x)$ на $x + 0,66$ найдем значение $f'(-0,66)$. По схеме Горнера получаем

	3	−20	44
−0,66		−1,92	+14,4672
	3	−21,92	58,4672 = $f'(-0,66)$ (остаток от деления)

Итак, сохраняя два знака после запятой, $f'(-0,66) = 58,47$. Это значение производной будем брать и в последующих приближениях.

Используем формулу (1,3) и, полагая в ней $n = 1$, получаем

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

У нас $x_1 = -0,66$; $f(x_1) = -4,69$; $f'(x_1) = 58,47$;

$$x_2 = -0,66 - \frac{-4,69}{58,47} = -0,66 + 0,0802;$$

$$x_2 = -0,5798.$$

Для третьего приближения следует вычислить $f(-0,5798)$. Делением $f(x)$ на $x + 0,5798$ получим

	1	−10	44	29
−0,5798		−0,5798	6,1342	−29,0678
	1	−10,5798	50,1342	−0,0678 = $f(-0,5798)$

Полагая в формуле (1,3) $n = 2$, найдем

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Но мы условились, что знаменатель дроби в правой части формулы (1,3) будем брать одним и тем же во всех приближениях, а потому возьмем его равным $f'(x) = 58,47$. Тогда $x_2 = -0,5798$, $f(x_2) = -0,0678$, а

$$x_3 = -0,5798 - \frac{-0,0678}{58,47} = -0,5798 + 0,0012; \ x_3 = -0,5786.$$

Это тот же корень, который был найден по способу № 2. Закончим теперь решение этой задачи. У нас $x = -0{,}5786$.

В таблице (E) уже проведено деление $f(x)$ на $x + 0{,}5786$, и коэффициенты частного от деления равны 1, $-10{,}5786$ и $50{,}1208$, а само частное будет $x^2 - 10{,}5786x + 50{,}1208$. Приравниваем его нулю и решаем квадратное уравнение

$$x^2 - 10{,}5786x + 50{,}1208 = 0;$$
$$x = 5{,}2893 \pm \sqrt{27{,}9767 - 50{,}1208};$$
$$x = 5{,}2893 \pm \sqrt{22{,}1441}\,i;$$
$$x = 5{,}2893 \pm i \cdot 4{,}7058.$$

Итак,

$$x_1 = -0{,}5786;$$
$$x_2 = 5{,}2893 + 4{,}7058i;$$
$$x_3 = 5{,}2893 - 4{,}7058i.$$

И здесь отметим, что уравнение в соответствии с правилом Декарта действительно имеет только один отрицательный корень.

Проверка.

$x_1 + x_2 + x_3 = 10$ (верно!), так как сумма корней по (1,28) должна быть равна $-\frac{a_1}{a_0}$, а у нас

$$a_1 = -10; \quad a_0 = 1 \text{ и } -\frac{a_1}{a_0} = 10.$$

Найдем произведение корней: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -0{,}5786 \cdot (5{,}2893 + 4{,}7058i) \cdot (5{,}2893 - 4{,}7058i) = -0{,}5786 \times 50{,}1212 = -29{,}0001$, а должно быть -29, так как произведение корней по (1,29) равно $(-1)^n \frac{a_n}{a_0}$. У нас показатель степени $n = 3$; $a_n = 29$, $a_0 = 1$ и $(-1)^n \frac{a_n}{a_0} = -29$.

Таким образом, проверка дала хорошие результаты.

Решим теперь этот же пример по способу № 4 (см. стр. 9).

1. Составляем квадратное уравнение вида (1,10)

$$a_{n-2} = -10; \quad a_{n-1} = 44; \quad a_n = 29.$$

Это уравнение приобретает вид

$$-10x^2 + 44x + 29 = 0.$$

Умножая обе его части на -1, получим

$$10x^2 - 44x - 29 = 0.$$

2. Легко убедиться, что корни этого уравнения действительны.

Теперь решаем уравнение вида (1,11), в котором у $a_{n-1} + 44$; $a_n = +29$, а само уравнение имеет вид

$$44x + 29 = 0.$$

Корень этого уравнения $x = -0,6592$ принимаем за первое приближение искомого корня. Левую часть уравнения делим по способу Горнера на $x + 0,6592$ и получаем

	1	−10	44	29
−0,6592		−0,6592	7,0265	—
	1	−10,6592	$\underbrace{51,0265}_{b_{n-1}}$	29

Составляем уравнение вида (1,13), в котором $b_{n-1} = 51,0265$, $a_n = 29$. Это уравнение имеет вид

$$51,0265x + 29 = 0.$$

Отсюда получаем второе приближение искомого корня

$$x_2 = -0,5683.$$

Теперь делим левую часть уравнения на $x + 0,5683$ по схеме Горнера:

	1	−10	44	29
−0,5683		−0,5683	6,0060	—
	1	−10,5683	$\underbrace{50,0060}_{c_{n-1}}$	29

Затем составляем уравнение (1,16), которое приобретает вид

$$50,0060x + 29 = 0,$$

и находим, что третье приближение искомого корня будет

$$x_3 = -0,5799.$$

Продолжая деление, на следующем шаге получаем

	1	−10	44	29
−0,5799		−0,5799	6,1353	—
	1	−10,5799	$\underbrace{50,1353}_{d_{n-1}}$	29

и составляем уравнение

$$50,1353x + 29 = 0.$$

Отсюда четвертое приближение

$$x_4 = -0{,}5784.$$

Снова деля, получим

	1	—10	44	29
—0,5784		—0,5784	6,1185	—
	1	—10,5084	50,1185	29

и для определения следующего приближения будем иметь уравнение

$$50{,}1185x + 29 = 0;$$

$$x_5 = -0{,}5786.$$

Следующее приближение снова даст $x_6 = -0{,}5786$ (проверьте самостоятельно). На этом значении мы и остановимся.

Итак, $x = -0{,}5786$. Это то же значение, что и полученное раньше. Однако вычислительная работа была значительно меньшей и чрезвычайно простой. Здесь способ № 4 быстро привел к цели. Он очень прост в применении.

Содержание. Численное решение алгебраических уравнений

Задача 2,1. Найти с точностью до 0,00001 корни уравнения

$$x^3-3x^2-17x+22=0.$$

Решение. Решим эту задачу по способу № 4. Составим квадратное уравнение вида (1,10)

$$-3x^2-17x+22=0.$$

Корни этого уравнения, как нетрудно видеть, действительны, а потому решаем уравнение (1,11), которое дает $-17x+22=0$, откуда $x_1=1{,}294118$ (вычисления будем вести с одним запасным знаком). По схеме Горнера делим левую часть уравнения на $x-1{,}294118$ и получаем

	1	—3	—17	22
1,294118		1,294118	—2,207613	—24,856918
	1	—1,705882	$\underbrace{-19{,}207613}_{b_{n-1}}$	— 2,856918

Составляем уравнение вида (1,13). У нас $b_{n-1}=-19{,}207613$, а свободный член уравнения $a_n=22$ и для определения второго приближения имеем $-19{,}207613x+22=0$; второе приближение

$$x_2=1{,}145379.$$

Делим левую часть уравнения по схеме Горнера на $x-x_2$, т. е. на $x-1{,}145\,379$.

	1	—3	—17	22
1,145379		1,145379	— 2,124244	—21,904507
	1	—1,854621	$\underbrace{-19{,}124244}_{c_{n-1}}$	+0,095493

(обратите внимание на то, что остаток уменьшился по абсолютной величине и изменил знак, однако он еще велик).

Теперь составляем уравнение (1,16) в котором $c_{n-1} = -19,124244$ и по-прежнему $a_n = 22$. Получаем

$$-19,124244x + 22 = 0,$$

а третье приближение $x_3 = 1,150372$.

Делим $f(x)$ на $x - 1,150372$ по схеме Горнера:

	1	—3	—17	22
1,150372		1,150372	2,127660	—22,003924
	1	—1,849628	$\underbrace{-19,127660}_{d_{n-1}}$	— 0,003924 (остаток от деления)

Решаем уравнение (1,16) которое теперь принимает вид $-19,127660x + 22 = 0$. Отсюда $x_4 = 1,150167$.

Новое деление по схеме Горнера $f(x)$ на $x - 1,150167$ дает

	1	—3	—17	22	
1,150167		1,150167	— 2,127617	—21,999954	(A)
	1	—1,849833	—19,127617	+ 0,000046 (остаток от деления)	

Остаток от деления изменил знак по сравнению с предыдущим и оказался теперь достаточно малым. Мы брали четвертое приближение равным $x_4 = 1,150167$. Округлим его до пяти знаков и возьмем $x = 1,15017$. Произведем два деления: 1) $f(x)$ на $x - 1,15017$ и 2) $f(x)$ на $x - 1,15016$.

Первое деление дает

	1	—3	—17	—22	
1,15017		1,15017	— 2,12762	—22,00001	(A)
	1	—1,84983 (коэффициенты частного)	—19,12762	— 0,00001 (остаток от деления)	

и остаток от деления отрицателен.

Деление $f(x)$ на $x - 1,15016$ дает

	1	−3	−17	22
1,15016		1,15016	−2,12761	−21,99981
	1	−1,84984	−19,12761	0,00019 (остаток от деления)

и остаток от деления положителен.

Таким образом, в качестве искомого корня можно взять $x = 1,15016$ или $x = 1,15017$. Берем $x = 1,15017$. Разделим теперь $f(x)$ на $x - 1,15017$. В таблице (A) уже найдены коэффициенты частного, а само частное равно

$$x^2 - 1,84983x - 19,12762.$$

Приравняем его нулю и решим уравнение

$$x^2 - 1,84983x - 19,12762 = 0;$$

$$x = 0,92492 \pm \sqrt{0,85548 + 19,12762};$$

$$x = 0,92492 \pm \sqrt{19,98310} = 0,92492 \pm 4,47024 = \begin{cases} +5,39516 \\ -3,54532 \end{cases}$$

Таким образом, мы получили следующие корни: $x_1 = -3,54532$; $x_2 = 1,15017$; $x_3 = 5,39516$.

Проверка:

Сумма корней

$$x_1 + x_2 + x_3 = +3,00001,$$

т. е. на одну стотысячную больше того, что должно было получиться. Произведение же корней

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -21,99995$$

вместо −22, что также следует признать хорошим результатом.

Задача 2,2. Найти корни уравнения

$$f(x) = x^3 - 10,91x^2 + 38,52x - 44,36 = 0.$$

Решение. По правилу Декарта заключаем, что отрицательных корней уравнение не имеет, так как нет ни одного сохранения знака в ряде коэффициентов $(+ - + -)$. Положительных корней будет три или один, так как число перемен знака равно трем. Испытаем в качестве корней числа 2 и 3, а $f(2)$ и $f(3)$

найдем как остатки от деления $f(x)$ соответственно на $x-2$ и на $x-3$. Делим по схеме Горнера:

	1	−10,91	38,52	−44,36
2		2	−17,82	41,40
	1	8,91	20,70	−2,60 = $f(2)$ (остаток от деления)

Итак, $f(2) = -2,60$

	1	−10,91	38,52	−44,36
3		3	−23,73	44,37
	1	−7,91	14,79	+ 0,01 = $f(3)$ (остаток от деления)

и $f(3) = +0,01$. Поскольку $f(2)$ и $f(3)$ имеют различные знаки, в отрезке [2; 3] имеется корень, причем, так как остаток от деления $f(x)$ на $x-3$ значительно меньше по абсолютной величине, чем остаток от деления на $x-2$, мы заключаем, что корень имеет значение, близкое к 3.

Полезно исследовать, не будет ли уравнение иметь два близких корня. Используя указания на стр. 15, разделим $f'(x)$ на $x-3$. У нас $f'(x) = 3x^2 - 21,82x + 38,52$. Деление дает

	3	−21,82	38,52
3		9	−38,46
	3	−12,82	0,06 = $f'(3)$

Поскольку остаток от деления мал, делаем заключение, что число, близкое к 3, является корнем и производной $f'(x)$. Это говорит о том, что уравнение имеет два близких корня.

Находим корень уравнения $f'(x) = 0$, т. е. уравнения

$$\varphi(x) = 3x^2 - 21,82x + 38,52 = 0.$$

Решение будем проводить по способу Ньютона. Первым приближением корня будем считать $x = 3$. Двукратным последовательным делением левой части последнего уравнения на $x-3$ найдем остаток от деления, причем первый остаток даст числитель, а второй — знаменатель дроби в формуле (1,3). Деление производим на одной таблице:

	3	$-21,82$	$38,52$
3		9	$-38,46$
	3	$-12,82$	$+0,06=\varphi(3)$
3		9	
	3	$-3,82=\varphi'(3)$	

Считая в формуле (1,3) первым приближением число 3, найдем, что корень уравнения $f'(x)=0$, который обозначим буквой a, равен

$$a=3-\frac{0,06}{-382};$$
$$a=3,0157.$$

Теперь воспользуемся формулой (1,22, стр. 15), чтобы получить два близких между собою корня уравнения. Для того чтобы воспользоваться этой формулой, нам следует найти

$$f(a) \text{ и } \frac{1}{2}f''(a).$$

Разделим $f(x)$ на $x-a$ три раза последовательно. Остаток от первого деления даст $f(a)$, а остаток от третьего деления $\frac{1}{2}f''(a)$. Деление по схеме Горнера произведем на одной таблице:

	1	$-10,91$	$38,52$	$-44,36$
3,0157		3,0157	$-23,8068$	44,3706
	1	$-7,8943$	14,7132	$0,0106=f(a)$
3,0157		3,0157	$-14,7124$	
	1	4,8786	$0,0008=f'(a)$	
3,0157		3,0157		
	1	$-1,8629=\frac{1}{2}f''(a)$		

Теперь находим корни уравнения по формуле (1,22). У нас $f(a) = 0{,}0106$; $\frac{1}{2}f''(a) = -1{,}8629$; $a = 3{,}0157$;

$$x_{1,2} = 3{,}0157 \pm \sqrt{\frac{-0{,}0106}{-1{,}8629}};$$

$$x_{1,2} = 3{,}0157 \pm \sqrt{0{,}0057};$$

$$x_{1,2} = 3{,}0157 \pm 0{,}0747;$$

$$x_1 = 3{,}0904;$$

$$x_2 = 2{,}9410$$

Сохраняя после запятой только два десятичных знака, получаем $x_1 = 3{,}09$; $x_2 = 2{,}94$. Точные значения корней данного уравнения 2,92 и 3,12. Разделим $f(x)$ на произведение $(x - 2{,}94) \times \times (x - 3{,}09)$. По схеме Горнера сначала разделим на $x - 2{,}94$, а потом на $x - 3{,}09$, причем деление выполним на одной таблице:

	1	−10,91	38,52	−44,36
2,94		2,94	−23,43	+44,36
	1	7,97	15,09	$0 = f(2{,}94)$
3,09		3,09	−15,11	
	1	−4,89	− 0,02	

Частное от деления равно $x - 4{,}89$. Приравнивая его нулю, получаем уравнение для определения третьего корня

$$x - 4{,}89 = 0$$

откуда $x = 4{,}89$.

Итак, корни уравнения: $x_1 = 2{,}94$; $x_2 = 3{,}09$; $x_3 = 4{,}89$.

Проверка. Сумма корней дает $x_1 + x_2 + x_3 = 10{,}92$ вместо 10,91, а произведение корней $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 44{,}40$ вместо 44,36. Полученные приближенные значения корней следует признать хорошими.

Задача 2,3. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3{,}74x^2 + 8{,}18x - 3{,}48 = 0$.

Решение. По правилу Декарта заключаем, что будет один отрицательный корень, так как в ряде коэффициентов только одно сохранение знака, положительных корней — один или три, поскольку число перемен знака равно трем.

Для отыскания наибольшего по абсолютной величине корня решим уравнение вида (1,6), где в нашем случае $a_1 = -2$. Решаем уравнение

$$x - 2 = 0,$$

откуда $x = 2$.

Для определения значения левой части уравнения при $x = 2$ разделим $f(x)$ на $x - 2$ по схеме Горнера:

	1	—2	—3,74	8,18	—3,48
2		2	0	—7,48	1,40
	1	0	—3,74	0,70	—2,08 = $f(2)$

Теперь решим квадратное уравнение вида (1,7). У нас $a_1 = -2$; $a_2 = -3,74$, и (1,7) запишется в виде

$$x^2 - 2x - 3,74 = 0;$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1 + 3,74}; \quad x = 1 \pm \sqrt{4,74}; \quad x = 1 \pm 2,17.$$

Выбираем $x = 1 + 2,17$ или $x = 3,17$, так как мы ищем приближенное значение наибольшего по абсолютной величине корня. Найдем теперь $f(3,17)$. Пользуясь схемой Горнера, получим

	1	—2	—3,74	8,18	—3,48
3,17		3,17	3,71	—0,10	25,61
	1	1,17	—0,03	8,08	22,13 = $f(3,17)$

Итак, $f(2) < 0$, а $f(3,17) > 0$ и, значит, искомый корень находится на отрезке [2; 3,17], причем он ближе к 2, чем к 3,17, так как остаток от деления на $x - 2$ меньше по абсолютной величине остатка от деления на $x - 3,17$. Попробуем сузить отрезок, на котором находится корень. Возьмем среднее арифметическое из абсцисс концов отрезка $\frac{2 + 3,17}{2} = 2,58$ и рассмотрим $f(2,58)$.

Применяя схему Горнера, получим

	1	—2	—3,74	8,18	—3,48
2,58		2,58	1,50	—5,80	+6,14
	1	0,58	—2,24	2,38	2,66 = $f(2,58)$

(A)

Поскольку $f(2,58) = 2,66$, а $f(2) = -2,08$, корень находится в отрезке [2; 2,58]. Этот отрезок по сравнению с предыдущим значительно сужен. Для решения задачи применим способ Ньютона.

Определим $f''(x)$, чтобы решить вопрос, какой из концов этого отрезка принять за первое приближение корня.

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 7{,}48x + 8{,}18;$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 7{,}48.$$

Найдем значение второй производной при $x = 2$ и при $x = 2{,}58$. Снова применяя схему Горнера, получим

	12	−12	− 7,48
2		24	24
	12	12	16,52 = $f''(2)$

	12	−12	− 7,48
2,58		30,96	48,92
	12	18,96	41,44 = $f''(2{,}58)$

Легко проверить, что $f''(x)$ внутри отрезка [2; 2,58] в нуль не обращается. Таким образом, на всем этом отрезке $f''(x)$ сохраняет знак, оставаясь положительной. А так как функция $f(x)$ положительна на правом конце отрезка [2; 2,58], то значение x на правом конце этого отрезка, т. е. $x = 2{,}58$, и следует принять за первое приближение искомого корня.

Нами уже найдено $f(2{,}58) = 2{,}66$ (табл. A), определим $f'(2{,}58)$, так как $f'(x_n)$ входит в формулу (1,3) в способе Ньютона.

Для определения $f'(2{,}58)$ разделим $f'(x)$ на $x - 2{,}58$ по схеме Горнера ($f'(x)$ было получено раньше):

	4	− 6	− 7,48	8,18
2,58		10,32	11,14	9,44
	4	4,32	3,66	17,62 = $f'(2{,}58)$ (остаток от деления)

Итак, $f'(2{,}58) = 17{,}62$.

По формуле (1,3), в которой $x_1 = 2,58$, $f(x_1) = 2,66$, $f'(x) = 17,62$,

$$x_2 = 2,58 - \frac{2,6}{17,62} = 2,58 - 0,15 = 2,43;$$

$$x_2 = 2,43 \text{ (второе приближение корня).}$$

Вычислим теперь $f(x_2)$ и $f'(x_2)$ делением $f(x)$ и $f'(x)$ на $x - 2,43$, причем деление выполним на одной таблице:

	1	−2	3,74	8,18	−3,48
2,43		2,43	1,04	−6,56	3,93
	1	0,43	−2,70	1,62	0,45 = $f(2,43)$ (остаток от деления)
2,43		2,43	6,94	10,30	
	1	2,86	4,24	11,92 = $f'(2,43)$ (остаток от деления)	

Итак, $f(2,43) = 0,45$, а $f'(2,43) = 11,92$.
Формула (1,3) дает третье приближение

$$x_3 = 2,43 - \frac{0,45}{11,92};$$

$$x_3 = 2,43 - 0,0377; \quad x_3 = 2,3923.$$

Найдем еще одно приближение. Получаем $f(x_3)$ и $f'(x_3)$.
По схеме Горнера

	1	−2	−3,74	8,18	−3,48
2,3923		2,3923	0,9385	−6,7020	3,5358
	1	0,3923	−2,8015	1,4780	0,0558 = $f(2,3923)$ (остаток от деления)
2,3923		2,3923	6,6616	9,2345	
	1	2,7846	3,8601	10,7125 = $f'(2,3923)$ (остаток от деления)	

Четвертое приближение корня по формуле (1,3) даст

$$x_4 = 2,3923 - \frac{0,0558}{10,7125} = 2,3923 - 0,0052;$$

$$x_4 = 2,3871.$$

Знаки $f(2,3871)$ и $f(2,3870)$ противоположны (проверьте), поэтому мы можем утверждать, что $x = 2,3871$ с точностью до одной десятитысячной дает искомый корень.

Разделим теперь $f(x)$ на $x - 2,3871$ и частное приравняем нулю. Выполним деление по схеме Горнера:

	1	−2	−3,74	8,18	−3,48
2,3871		2,3871	0,9240	−6,7221	3,4801
	1	0,3871	−2,8160	1,4579	0,0001 = $f(2,3871)$ (остаток от деления)

Частное от деления равно

$$\varphi(x) = x^3 + 0,3871x^2 - 2,8160x + 1,4579. \qquad (B)$$

Округлим его коэффициенты до двух десятичных знаков, приравняем нулю и решим уравнение

$$f_1(x) = x^3 + 0,39x^2 - 2,82x^2 + 1,46 = 0.$$

Находим приближенное значение наименьшего по абсолютной величине корня этого уравнения. Решаем уравнение вида (1,8). У нас $a_{n-1} = -2,82$; $a_n = 1,46$, и это уравнение принимает вид

$$-2,82x + 1,46 = 0,$$

откуда получаем приближенное значение корня $x = 0,52$.

Найдем теперь отрезок, на котором находится корень. Разделим левую часть уравнения $f_1(x)$ на $x - 0,52$, чтобы определить $f_1(0,52)$,

	1	0,39	−2,82	1,46
0,52		0,52	0,47	−1,22
	1	0,91	−2,35	+0,24 = $f_1(0,52)$ (остаток от деления)

Предположим, что вторым концом отрезка будет $x = 1$. Остаток от деления $f_1(x)$ на $x - 1$ даст значение $f_1(1)$

	1	0,39	−2,82	1,46
1		1	1,39	−1,43
	1	1,39	−1,43	$+0{,}03 = f_1(1)$ (остаток от деления)

Остаток от деления сохранил знак, но значительно уменьшился.

Возьмем $x = 1{,}1$. Разделим $f_1(x)$ на $x - 1{,}1$:

	1	0,39	−2,82	1,46
1,1		1,1	1,64	−1,30
	1	1,49	−1,18	$+0{,}16 = f_1(1{,}1)$

Мы нашли, что $f_1(1,1)$ больше, чем $f_1(1)$, т. е. мы уходим от корня, а не приближаемся к нему. Исследуем $x = 0{,}9$. Деление по схеме Горнера даст

	1	0,39	−2,82	1,46
0,9		0,9	1,16	−1,49
	1	1,29	−1,66	$-0{,}03 = f_1(0{,}9)$ (остаток от деления)

Таким образом, $f_1(0{,}52) = 0{,}24$, а $f_1(0{,}9) = -0{,}03$ и корень находится на отрезке $[0{,}52;\ 0{,}90]$, причем, так как $f_1(0{,}9)$ значительно меньше по абсолютной величине, чем $f(0{,}52)$, то заключаем, что корень находится ближе к 0,9, чем к 0,52. Кстати, из того, что $f_1(0{,}9) < 0$, а $f_1(1) = +0{,}03 > 0$, можно сделать заключение, что на отрезке $[0{,}9;\ 1]$ имеется еще один корень уравнения. Все это заставляет прийти к выводу, что есть два близких корня на отрезке $[0{,}52;\ 1]$, поэтому следует поступать в соответствии с указаниями, данными на стр. 15.

Решаем уравнение $f_1'(x) = 0$, т. е. уравнение

$$3x^2 + 0{,}78x - 2{,}82 = 0,$$

и определяем его корни $x = -1{,}10$ и $x = 0{,}84$. Выбираем 0,84, так как это значение лежит на отрезке, на котором находится корень. Полученное значение $x = 0{,}84$ и есть величина a в формуле (1,22).

Теперь воспользуемся формулами (1,22) и для этого вычислим $f_1(0{,}84)$ и $\frac{1}{2} f_1''(0{,}84)$. Величина $\frac{1}{2} f_1''(0{,}84)$ будет остатком от трехкратного деления $f_1(x)$ на $x - 0{,}84$:

	1	0,39	$-2,82$	1,46
0,84		0,84	1,03	$-1,50$
	1	1,23	$-1,79$	$\underline{-0,04 = f_1(0,84)}$
0,84		0,84	1,74	
	1	2,07	$\underline{-0,05 = f_1'(0,84)}$	
0,84		0,84		
	1	$2,91 = \frac{1}{2} f''(0,84)$		

Итак, $f_1(0,84) = -0,04$; $\frac{1}{2} f''(0,84) = 2,91$, и из формулы (1,22) (стр. 15) с учетом, что $a = 0,84$, получим

$$x_{1,2} = 0,84 \pm \sqrt{-\frac{-0,04}{2,91}};$$

$$x_{1,2} = 0,84 \pm \sqrt{0,0137};\ x_{1,2} = 0,84 \pm 0,11;$$

$$x_1 = 0,73 \text{ и } x_2 = 0,95.$$

Эти два корня попробуем улучшить, чтобы получить их с точностью до 0,0001. Начнем с корня $x_1 = 0,73$. Вычислим $f_1(0,73)$ и $f_1(0,72)$ делением $f_1(x)$ сначала на $x - 0,73$, а потом на $x - 0,72$

	1	0,39	$-2,82$	1,46
0,73		0,73	0,81	$-1,4673$
	1	1,12	$-2,01$	$\underline{-0,0073 = f_1(0,73) < 0}$
	1	0,39	$-2,82$	1,46
0,72		0,72	0,7992	$-1,4550$
	1	1,11	$-2,0208$	$\underline{+0,0050 = f_1(0,72) > 0}$

Таким образом, корень находится на отрезке [0,72; 0,73]. Если бы нас удовлетворяла точность в 0,01, мы бы на этом остановились.

Сузим отрезок [0,72; 0,73], взяв в качестве его левого конца среднее арифметическое из значений 0,72 и 0,73, т. е. 0,725. Определим знак функции на этом конце отрезка, но операции будем производить не с многочленом $f_1(x)$, у которого коэффициенты округлены, а с многочленом (B).

Найдем значение многочлена (B), который у нас обозначен через $\varphi(x)$, и его производной при $x = 0{,}725$. Двухкратное деление по схеме Горнера дает

	1	0,3871	−2,8160	1,4579
0,725		0,725	0,8063	−1,4570
	1	0,1121	−2,0097	+0,0009 = φ (0,725)
0,725		0,725	1,3319	
	1	1,8371	−0,6778 = φ' (0,725)	

Таким образом, корень находится на отрезке [0,725; 0,730]. Уточним корень по способу Ньютона. Легко усмотреть, что $\varphi''(x)$ на отрезке [0,725; 0,730] сохраняет положительное значение, поэтому за приближенное значение корня принимаем его значение на левом конце интервала, т. е. 0,725, так как на этом конце интервала и функция положительна: $\varphi(0{,}725) = +0{,}0009$.

Пользуясь формулой (1,3), в которой надо взять $x_1 = 0{,}725$; $f(x_1) = +0{,}0009$; $f'(x_1) = -0{,}6778$, получим

$$x_2 = 0{,}725 - \frac{+0{,}0009}{-0{,}6778};\quad x_2 = 0{,}725 + 0{,}0013;$$

$$x_2 = 0{,}7263.$$

Для выяснения знака $\varphi(x)$ при $x = 0{,}7263$ разделим $\varphi(x)$ на $x - 0{,}7263$:

	1	0,3871	−2,8160	1,4579	
0,7263		0,7263	0,8087	1,4579	(D)
	1	1,1134	−2,0073	0 = φ (0,7263)	

$x = 0{,}7263$ является корнем уравнения. На этом заканчиваем уточнение корня $x = 0{,}73$.

После того как найдем корень $x = 0{,}7263$, можно разделить $\varphi(x)$ на $x - 0{,}7263$. Мы получили бы $x^2 + 1{,}1134x - 2{,}0073$, а приравняв нулю и решив квадратное уравнение $x^2 + 1{,}1134x - 2{,}0073 = 0$, нашли бы корни $x = -2{,}0789$ и $x = 0{,}9655$. Но для упражнения в применении способа Ньютона уточним полученное значение корня $x = 0{,}95$.

На стр. 46 было выяснено, что корень находится на отрезке $[0{,}9;\ 1]$. На правом конце этого отрезка $\varphi(1) > 0$; $\varphi''(x)$ на этом отрезке имеет положительное значение, а потому за приближенное значение корня принимаем $x = 1$, так как при $x = 1$ и $\varphi(x)$ и $\varphi''(x)$ совпадают по знаку. Вычислим значение $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ при $x = 1$ двукратным делением $\varphi(x)$ на $x - 1$:

	1	0,3871	−2,8160	1,4579
1		1	1,3871	−1,4289
	1	1,3871	−1,4289	0,0290 = $\varphi(1)$
1		1	2,3871	
	1	2,3871	0,9582 = $\varphi'(1)$	

и по формуле (1,3) найдем $x_2 = 1 - \frac{0{,}0290}{0{,}9582}$; $x_2 = 1 - 0{,}0303$; $x_2 = 0{,}9697$.

Чтобы получить следующее приближение, определим $\varphi(0{,}9697)$ и $\varphi'(0{,}9697)$ двукратным делением $\varphi(x)$ на $x - 0{,}9697$

	1	0,3871	−2,8160	1,4579
0,9697		0,9697	1,3157	−1,4548
	1	1,3568	−1,5093	0,0031 = $\varphi(0{,}9697)$
1,9697		0,9697	2,2560	
	1	2,3265	0,7557 = $\varphi'(0{,}9697)$	

Теперь по формуле (1,3)

$$x_2 = 0{,}9697 - \frac{0.0031}{0.7557};\ x_2 = 0{,}9697 - 0{,}0041;$$

$$x_2 = 0{,}9656.$$

Вычислим φ (0,9656):

	1	0,3871	—2,8160	1,4579
0,9656		0,9656	1,3062	1,4579
	1	1,3527	—1,5098	$\underline{0 = \varphi(0{,}9656)}$

Таким образом, $x = 0{,}9656$ является корнем уравнения. Три корня заданного уравнения найдены: $x_1 = 0{,}7263$; $x_2 = 0{,}9656$; $x_3 = 2{,}3871$.

Деление $f(x)$ на $x - 2{,}3871$ было уже произведено, и частным является многочлен (B). Разделив (B) на $x - 0{,}7263$, а новое частное на $x - 0{,}9656$, получим уравнение для определения последнего, четвертого корня. Деление $\varphi(x)$ на $x - 0{,}7263$ выполнено в таблице (D). Берем найденные в этой таблице коэффициенты частного и делим его на $x - 0{,}9656$:

	1	1,1134	—2,0073
0,9656		0,9656	2,0075
	1	2,0790	+0,0002

Коэффициенты частного будут 1 и 2,0790, а само частное $x + 2{,}0790$.

Решая уравнение $x + 2{,}0790 = 0$, найдем последний корень

$$x_4 = -2{,}0790.$$

Корнями уравнения будут числа $x_1 = 0{,}7263$; $x_2 = 0{,}9656$; $x_3 = 2{,}3871$; $x_4 = -2{,}0790$.

П р о в е р к а. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$, как и должно быть, а $x_1 \times x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = -3{,}4804$ (должно быть $-3{,}48$), что указывает на хорошие результаты вычислений.

Это же уравнение можно решить проще, минуя довольно утомительное нахождение двух близких корней уравнения. Применим способ № 4 для отыскания одного корня.

В нашем уравнении

$$x^4 - 2x^3 - 3{,}74x^2 + 8{,}18x - 3{,}48 = 0$$

выделим квадратный трехчлен вида (1,10)

$$-3,74x^2 + 8,18x - 3,48.$$

Его корни действительны, поэтому берем уравнение вида (1,11), т. е. $8,18x - 3,48 = 0$, откуда получаем первое приближение корня $x = 0,4254$.

Делим левую часть уравнения на $x - 0,4254$, пользуясь схемой Горнера:

	1	−2	−3,74	8,18	−3,48
0,4254		0,4254	−0,6698	−1,8759	2,6818
	1	−1,5746	−4,4098	$\underbrace{6,3041}_{b_{n-1}}$	−0,7982

Решаем уравнение (1,13), в котором $b_{n-1} = 6,3041$, а $a_n = -3,48$, т. е. уравнение

$$6,3041x - 3,48 = 0,$$

и находим второе приближение

$$x_2 = 0,5520.$$

Делим левую часть уравнения на $x - 0,5520$:

	1	−2	−3,74	8,18	−3,48
0,5520		0,5520	−0,7993	−2,5057	3,1322
	1	−1,4480	−4,5393	5,6743	−0,3478

Остаток от деления −0,3478 по сравнению с предыдущим −0,7982 уменьшился по абсолютной величине, но все еще остается большим, поэтому для ускорения сходимости применим форфулу (1,20), в которой $x_2 = 0,5520$, $x_1 = 0,4254$, $r_1 = -0,7982$, $r_2 = -0,3478$, и найдем третье приближение первого корня

$$x_3 = \frac{0,5520(-0,7982) - 0,4254 \cdot (-0,3478)}{-0,7982 - (-0,3478)};$$

$$x_3 = \frac{-0,2926}{-0,4504}; \quad x_3 = 0,6496.$$

Делим теперь левую часть уравнения на $x-0{,}6496$:

	1	—2	—3,74	8,18	—3,48
0,6496		0,6496	—0,8772	—2,9993	3,3654
	1	—1,3504	—4,6172	5,1807	—0,1146

Снова применяя формулу (1,20) получим

$$x_4=\frac{0{,}6496\,(-0{,}3478)-0{,}5520\,(-0{,}1146)}{-0{,}3478-(-0{,}1146)};$$

$$x_4=\frac{-0{,}1627}{-0{,}2332};\quad x_4=0{,}6977.$$

Делим левую часть уравнения на $x-0{,}6977$:

	1	—2	—3,74	8,18	—3,48
0,6977		—0,6977	—0,9086	—3,2433	3,4443
	1	—1,3023	—4,6486	4,9367	—0,0357

Получаем следующее приближение по формуле (1,20):

$$x_5=\frac{0{,}6977\,(-0{,}1146)-0{,}6496\,(-0{,}0357)}{-0{,}1146-(-0{,}0357)};$$

$$x_5=\frac{-0{,}0568}{-0{,}0789};\quad x_5=0{,}7199.$$

Разделим теперь левую часть уравнения на $x-0{,}7199$:

	1	—2	—3,74	8,18	—3,48
0,7199		0,7199	—0,9215	—3,3558	3,4729
	1	—1,2801	—4,6615	4,8242	—0,0071

Поступая, как и раньше, найдем следующее приближение:

$$x_6=\frac{0{,}7199\,(-0{,}0357)-0{,}6977\cdot(-0{,}0071)}{-0{,}0357-(-0{,}0071)}=\frac{-0{,}0207}{-0{,}0286};$$

$$x_6=0{,}7238.$$

Делим теперь левую часть уравнения на $x-0{,}7238$:

	1	—2	—3,74	8,18	—3,48
0,7238		0,7238	—0,9237	—3,3756	3,4774
	1	—1,2762	—4,6637	4,8044	—0,0026

Следующее приближение находим тем же путем:

$$x_7 = \frac{0{,}7238\cdot(-0{,}0071)-0{,}7199\,(-0{,}0026)}{-0{,}0071-(-0{,}0026)};$$

$$x_7 = 0{,}7260.$$

Разделим левую часть уравнения на $x-0{,}7260$:

	1	—2	—3,74	8,18	—3,48
0,7260		0,7260	0,9249	—3,3867	3,4799
	1	—1,2740	—4,6649	4,7933	—0,0001

Остаток от деления оказался очень малым, а потому на этом приближении можно остановиться.

Корень 0,7260 отличается от значения 0,7263, найденного раньше, только на 0,0003 (несмотря на то, что для улучшения сходимости была использована формула (1,20), изменение корня происходило медленно, хотя применение этой формулы и ускорило сходимость).

Задача 2,4. Решить уравнение

$$f(x) = x^4 - 10x^3 + 48{,}16x^2 + 108{,}08x + 70{,}76 = 0.$$

Решение (рекомендуется сначала прочесть на стр. 16 «Определение комплексных корней алгебраических уравнений»). Прежде всего замечаем, что последние три члена соответствуют квадратному уравнению с комплексными корнями. В качестве первого приближения выделяемого из $f(x)$ трехчлена берем трехчлен

$$48{,}16x^2 + 108{,}08x + 70{,}76$$

и делением его на коэффициент при x^2 получаем трехчлен

$$x^2 + 2{,}24x + 1{,}47, \qquad \text{(A)}$$

который принимаем за первое приближение выделяемого трехчлена.

Делим левую часть уравнения на трехчлен (A) по схеме деления, указанной на стр. 18, до получения в остатке квадратного трехчлена, который уже не делится на делитель (A).

	1	−10	48,16	108,08	70,76
−2,24	—	−2,24	27,42	—	
1,47	—	—	−1,47	17,99	
	1	−12,24	74,11	126,07	70,76

Остаток от деления равен

$$74,11x^2 + 126,07x + 70,76.$$

Делением на коэффициент при x^2 получаем

$$x^2 + 1,70x + 0,95. \qquad \text{(B)}$$

Делим левую часть данного уравнения на трехчлен (B)

	1	−10	48,16	108,08	70,76
−1,70	—	−1,70	19,89	—	
−0,95	—	—	−0,95	+11,12	
	1	−11,70	67,10	119,20	70,76

Остаток от деления равен

$$67,10x^2 + 119,20x + 70,76.$$

Делением его на коэффициент при x^2 получаем

$$x^2 + 1,78x + 1,05. \qquad \text{(C)}$$

Если разделить левую часть уравнения на трехчлен (C), получается:

	1	−10	48,16	108,08	70,76
−1,78	—	−1,78	20,96	—	
−1,05	—	—	−1,05	12,37	
	1	−11,78	<u>68,07</u>	<u>120,45</u>	<u>70,76</u>

Коэффициенты остатка от деления подчеркнуты, а остаток от деления будет равен

$$68{,}07x^2 + 120{,}45x + 70{,}76.$$

Деление на коэффициент при x^2 приводит к трехчлену

$$x^2 + 1{,}77x + 1{,}03, \tag{D}$$

который незначительно отличается от трехчлена (C). Процесс очень быстро сходился и можно было ограничиться только тремя делениями. Приравнивая трехчлен (D) нулю, решим квадратное уравнение

$$x^2 + 1{,}77x + 1{,}03 = 0;$$
$$x_{1,2} = -0{,}88 \pm \sqrt{0{,}77 - 1{,}03};$$
$$x_{1,2} = -0{,}88 \pm \sqrt{-0{,}26}$$

и окончательно

$$x_{1,2} = -0{,}88 \pm 0{,}51i.$$

Для определения остальных двух корней надо разделить левую часть данного уравнения на трехчлен (D). Коэффициенты частного уже известны из последней таблицы. Это 1; $-11{,}78$ и $68{,}07$. Таким образом, частное равно $x^2 - 11{,}78x + 68{,}07$. Приравниваем его нулю и решаем квадратное уравнение

$$x^2 - 11{,}78x + 68{,}07 = 0;$$
$$x_{3,4} = 5{,}89 \pm \sqrt{34{,}69 - 68{,}07};$$
$$x_{3,4} = 5{,}89 \pm \sqrt{-33{,}38};$$
$$x_{3,4} = 5{,}89 \pm 5{,}78i.$$

Итак, корнями являются числа $x_{1,2} = -0{,}88 \pm 0{,}51i$, $x_{3,4} = 5{,}89 \pm 5{,}78i$.

Проверка.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10{,}02 \text{ вместо } 10;$$
$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 70{,}14 \text{ вместо } 70{,}76.$$

Задача 2,5. Решить уравнение

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 20x^2 + 44x + 54 = 0.$$

Решение. Применим тот же способ, что и в предыдущей задаче. Последние три члена в уравнении приводят к квадратному уравнению с комплексными корнями — см. уравнение (1,22а)

$$20x^2 + 44x + 54 = 0.$$

После деления на коэффициент при x^2 получаем первое приближение выделяемого из $f(x)$ трехчлена

$$x^2 + 2{,}2x + 2{,}7. \tag{A}$$

Делим теперь $f(x)$ на трехчлен (A):

	1	−3	20	44	54
−2,2	—	−2,2	11,44	—	—
−2,7	—	—	−2,70	14,04	—
	1	−5,2	<u>28,74</u>	<u>58,04</u>	54

Коэффициенты остатка от деления подчеркнуты, а сам остаток равен

$$28{,}74x^2 + 58{,}04x + 54.$$

После деления на коэффициент при x^2 получаем

$$x^2 + 2{,}02x + 1{,}88 \tag{B}$$

и делим левую часть уравнения $f(x)$ на трехчлен (B):

	1	−3	20	44	54
−2,02	—	−2,02	10,14	—	—
−1,88	—	—	−1,88	9,44	—
	1	−5,02	<u>28,26</u>	<u>53,44</u>	<u>54</u>

Подчеркнутые числа являются коэффициентами остатка. Он имеет вид

$$28{,}26x^2 + 53{,}44x + 54.$$

После деления на 28,26 этот остаток запишется так:

$$x^2 + 1{,}89x + 1{,}91. \tag{C}$$

Проделаем ещё одно приближение:

	1	−3	20	44	54
−1,89	—	−1,89	9,24	—	—
−1,91	—	—	−1,91	9,33	—
	1	−4,89	<u>27,33</u>	<u>53,33</u>	<u>54</u>

Коэффициенты остатка подчеркнуты, а сам остаток равен

$$27,33x^2 + 53,33x + 54.$$

После деления на коэффициент при x^2 он принимает вид

$$x^2 + 1,95x + 1,98. \qquad (D)$$

По сравнению с трехчленом (C) мы получили незначительные изменения коэффициентов. Останавливаемся на этом приближении.

Приравниваем трехчлен (D) нулю и решаем квадратное уравнение

$$x^2 + 1,95x + 1,98 = 0;$$
$$x_{1,2} = -0,975 \pm \sqrt{0,951 - 1,980};$$
$$x_{1,2} = -0,975 \pm \sqrt{-1,029};$$
$$x_{1,2} = -0,975 \pm 1,014i.$$

Из последней таблицы уже известны коэффициенты частного от деления левой части данного уравнения на трехчлен (C). Это числа 1; —4,89; 27,33; само же частное имеет вид

$$x^2 - 4,89x + 27,33.$$

Приравниваем его нулю и решаем уравнение

$$x^2 - 4,89x + 27,33 = 0.$$
$$x_{3,4} = 2,445 \pm \sqrt{5,978 - 27,33};$$
$$x_{3,4} = 2,445 \pm 4,620i.$$

Проверка.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2,94 \text{ вместо } 3;$$
$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 54,1 \text{ вместо } 54.$$

При той небольшой точности, с которой велся расчет, результаты можно считать довольно хорошими.

Задача 2,6. Решить уравнение

$$f(x) = x^4 + 24,26x^3 + 274,3x^2 + 132,8x + 231 = 0.$$

Решение. Решение проведем по итерационному методу Фридмана, сущность которого поясним на примере.

Выделяем трехчлен вида (1,21) для определения комплексных корней с наименьшим модулем. Таким трехчленом будет $274,3x^2 + 132,8x + 231$, который после деления на коэффициент при x^2 запишется так: $x^2 + 0,484x + 0,842$.

1-й шаг. Расположим сначала делимое и делитель по убывающим степеням буквы x и проведем деление по схеме деления многочлена на квадратный трехчлен:

	1	24,26	274,3
—0,484	—	—0,484	—11,5
—0,842	—	—	—0,842
	1	23,77	261,9

(остальные столбцы не вычисляем, так как остатком от деления мы не интересуемся).

Итак, частное равно $x^2 + 23,77x + 261,9$. Разделим его на свободный член 261,9 и получим, располагая трехчлен по возрастающим степеням буквы x,

$$1 + 0,09x + 0,004x^2. \qquad (A)$$

2-й шаг. Расположив левую часть данного уравнения по возрастающим степеням буквы x, найдем

$$231 + 132,8x + 274,3x^2 + 24,26x^3 + x^4. \qquad (B)$$

Разделим теперь многочлен (B) на трехчлен (A). Деление выполняем по той же схеме:

	231	132,8	274,3
—0,09	—	—20,79	—10,08
—0,004	—	—	—0,92
	231	112,01	263,30

Таким образом, частное равно $231 + 112,01x + 263,30x^2$. Разделим этот трехчлен на коэффициент при x^2 и получим

$$x^2 + 0,425x + 0,877.$$

Повторим деление сначала так, как указано в 1-м шаге, а потом, как указано во 2-м шаге. Выполняем его по той же схеме на одной таблице:

	1	24,26	274,3	274,3	132,8	231	
—0,425	—	—0,425	—10,13	—10,08	—20,79	—	—0,09
—0,877	—	—	—0,877	—0,924	—	—	—0,004
	1	23,835	*263,293	*263,296	112,01	231	—
После деления на 263,293	0,004	0,9	1				

Частное от первого деления равно

$$x^2 + 23{,}835x + 263{,}293. \qquad (C)$$

Коэффициенты этого трехчлена делим на свободный член. Полученные от деления коэффициенты помещены в последнем столбце таблицы, а частное от второго деления (правая часть таблицы) равно

$$263{,}296x^2 + 112{,}01x + 231.$$

Близость чисел, отмеченных звездочками, говорит о том, что итерацию можно прекратить и считать, что левая часть уравнения разлагается на множители

$$x^2 + 0{,}425x + 0{,}877 \text{ и } x^2 + 23{,}835x + 263{,}293,$$

из которых первый был найден раньше, а второй есть трехчлен (С).

Приравнивая каждый из этих множителей нулю, получим два квадратных уравнения:

$$x^2 + 0{,}425x + 0{,}877 = 0;$$
$$x^2 + 23{,}835x + 263{,}293 = 0,$$

решая которые, найдем корни $x_{1,2} = -0{,}213 \pm 0{,}912i$; $x_{3,4} = -11{,}92 \pm 11{,}01i$.

Проверка.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24{,}266 \text{ вместо } 24{,}26;$$
$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 230{,}9 \text{ вместо } 231.$$

Эти результаты можно признать достаточно хорошими.

Задача 2,7 (для самостоятельного решения). Решить уравнение $x^3 - 5x + 1 = 0$ по способу Ньютона с точностью до 0,001, а потом — применяя способ Ньютона в модифицированном виде.

Ответ. $x = 0{,}202$.

Задача 2,8 (для самостоятельного решения). Решить уравнение $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$, применяя способ линейной интерполяции, а потом тот же способ в модифицированном виде. Точность 0,00001.

Ответ. $x = 0{,}38687$.

Задача 2,9 (для самостоятельного решения). Решить уравнение $x^5 + 5x + 1 = 0$ по способу № 4 с точностью до 0,00001.

Ответ. $x = -0{,}19994$.

Задача 2,9а (для самостоятельного решения). Определить с точностью до 10^{-3} все корни уравнения

$$x^6 + 25{,}00x^5 + 282{,}3x^4 + 337{,}5x^3 + 338{,}4x^2 + 179{,}9x + 7{,}360 = 0$$

по способу № 4.

Ответ. $x_1 = -0{,}046$; $x_2 = -0{,}698$; $x_{3,4} = -0{,}213 \pm 0{,}912i$; $x_{5,6} = -11{,}92 \pm 11{,}01i$.

Задача 2,10 (для самостоятельного решения). Определить с точностью до 10^{-2} корни уравнения

$$x^3 + 6{,}32x^2 + 27{,}5x + 31{,}6 = 0.$$

Ответ. $x = -1{,}57$.

Содержание. Решение трансцендентных уравнений

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. **Графическое решение.** Приближенное значение корней уравнения

$$f(x)=0 \tag{3,1}$$

можно получить, если тщательно вычертить на миллиметровке кривую $y=f(x)$ и определить абсциссы точек пересечения этой кривой с осью Ox. Для уточнения корней, найденных графически, можно воспользоваться способом Ньютона или способом хорд, которые описаны в первом практическом занятии, а также указанными там же модификациями этих методов.

Вместо построения кривой $y=f(x)$, которое может быть затруднительным, часто полезно представить уравнение $f(x)=0$ в виде

$$\varphi(x)-\psi(x)=0$$

или

$$\varphi(x)=\psi(x), \tag{3,2}$$

после чего построить кривые

$$y=\varphi(x) \text{ и } y=\psi(x), \tag{3,3}$$

причем, если удачно представить функцию $f(x)$ в виде разности $\varphi(x)-\psi(x)$, то построить кривые (3,3) будет значительно легче, чем кривую $y=f(x)$.

Если уравнение $f(x)=0$ заменено уравнением (3,2), то решениями исходного уравнения будут абсциссы точек пересечения кривых (3,3). Приведем пример.

Пусть требуется решить уравнение

$$\cos x \cdot e^x-1=0. \tag{A}$$

Представим его в виде

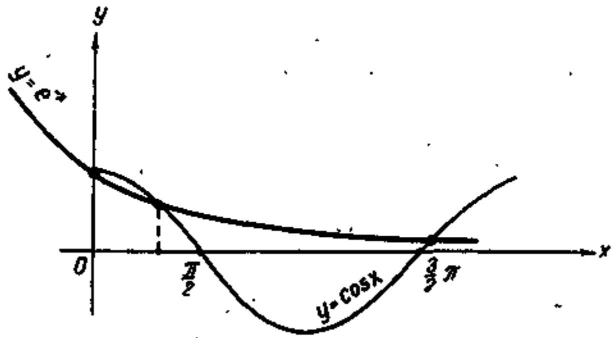
$$\cos x \cdot e^x=1$$

или

$$\cos x=\frac{1}{e^x}; \quad \cos x=e^{-x}. \tag{B}$$

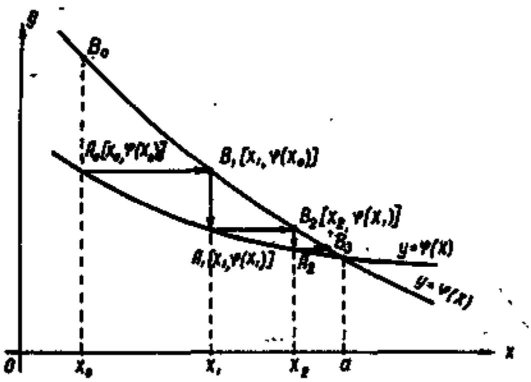
Построим кривые $y=\cos x$ и $y=e^{-x}$.

Абсциссы точек пересечения этих кривых и будут искомыми корнями данного уравнения. Очевидно, что построить кривые (В) значительно проще, чем кривую $y = \cos x \cdot e^x - 1$ (см. фиг. 3,0).



Фиг. 3,0

Кроме метода Ньютона и метода хорд, которые известны из предыдущих занятий, укажем еще один распространенный метод итерации, хотя методы хорд и касательных также являются частным случаем итерационных методов.



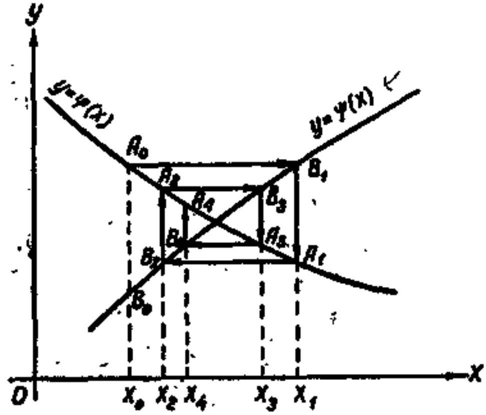
Фиг. 3,1

2. **Метод итерации.** После того, как уравнение $f(x) = 0$ переписано в виде $\varphi(x) = \psi(x)$, как уже было указано, даже грубое изображение этих кривых позволит найти приближенное значение корней уравнения $f(x) = 0$. Пусть таким приближенным значением одного корня будет $x = x_0$. Проведем прямую $x = x_0$. Она встретит рассматриваемые кривые в двух точках: фиг. 3,1 или фиг. 3,2.

Из этих двух точек следует выбрать ту, для которой угловой коэффициент касательной к кривой в точке x_0 имеет меньшую абсолютную величину. Положим, например, что

$$|\varphi'(x_0)| < |\psi'(x_0)|.$$

На фиг. 3,1 и 3,2 такой является точка A_0 на кривой $y = \varphi(x)$. В этой точке $|\varphi'(x_0)| < |\psi'(x_0)|$. По найденному значению $x = x_0$ определяем ординату $y_0 = \varphi(x_0)$ точки пересечения прямой $x = x_0$ с кривой $y = \varphi(x)$. Через точку $A_0[x_0, \varphi(x_0)]$ проводим прямую,



Фиг. 3,2

параллельную оси Ox, до пересечения в точке B_1 с кривой $y = \psi(x)$. Ордината точки B_1 такая же, как и ордината точки A_0. Подставляя в уравнение $y = \psi(x)$ вместо y значение $y_0 = \varphi(x_0)$ и решая уравнение

$$\psi(x) = \varphi(x_0),$$

находим значение x_1 — второе приближение корня. Найденное x_1 является абсциссой точки B_1 и, следовательно, абсциссой точки A_1. По известной абсциссе точки A_1 находим ее ординату y_1, которая равна значению функции $\varphi(x)$ при $x = x_1$, т. е. $y_1 = \varphi(x_1)$.

Из точки A_1 проводим прямую, параллельную оси Ox, до пересечения в точке B_2 с кривой $y = \psi(x)$. Ордината точки B_2 такая же, как и ордината точки A_1. Подставляя в уравнение $y = \psi(x)$ вместо y значение $y_1 = \varphi(x_1)$ и решая уравнение

$$\psi(x) = \varphi(x_1),$$

находим x_2 — третье приближение корня, которое является одновременно абсциссой точек B_2 и A_2.

Дальше поступаем так же. Зная абсциссу точки A_2 из уравнения $y=\varphi(x)$, заменяя в нем x на x_2, находим $y_2=\varphi(x_2)$ — ординату точки A_2. Из точки A_2 проводим прямую, параллельную оси Ox, до пересечения ее в точке B_3 с кривой $y=\psi(x)$. Точка B_3 имеет такую же ординату, как и точка A_2. Зная ординату точки B_3, равную $y_2=\varphi(x_2)$, и подставляя это значение вместо y в уравнение $y=\psi(x)$, решаем уравнение

$$\psi(x)=\varphi(x_2)$$

и определяем абсциссу x_3 точки B_3. Значение x_3 является четвертым приближением искомого корня.

Следующие приближения находим так же.

Если угловые коэффициенты касательных к кривым $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$ вблизи точки пересечения имеют один и тот же знак, то последовательные приближения $x_0, x_1, x_2, \ldots$ стремятся к корню с одной стороны (фиг. 3,1), а если эти угловые коэффициенты имеют противоположные знаки, то приближения x_0, x_1, x_2 стремятся к корню, принимая попеременно значения, то меньшие, то большие корня (фиг. 3,2).

Но предложенный метод, который будем называть первым, не является единственным. Все выкладки значительно упрощаются, если заданное уравнение $f(x)=0$ представить в виде

$$x=\varphi(x), \tag{3,4}$$

а этого можно достигнуть всегда.

Действительно, если $f(x)=0$, то и $\lambda f(x)=0$, где λ — величина постоянная. Прибавляем x к обеим частям последнего уравнения:

$$x+\lambda f(x)=x.$$

Обозначая теперь

$$x+\lambda f(x)=\varphi(x), \tag{3,5}$$

получаем уравнение (3,4).

Таким образом, показано, что уравнение $f(x)=0$ можно преобразовать к виду $x=\varphi(x)$, но параметр λ остался свободным. О выборе его будет сказано ниже (см. стр 66). После того как заданное уравнение $f(x)=0$ представлено в виде (3,4)

$$x=\varphi(x),$$

поступают так: графически или методом проб находят первое приближение корня $x=x_0$. Для получения следующего приближения в правую часть уравнения (3,4) подставляют x_0 и тогда вторым приближением корня будет

$$x_1=\varphi(x_0).$$

Подставляя в правую часть уравнения (3,4) x_1 вместо x, находим третье приближение x_2 корня

$$x_2 = \varphi(x_1).$$

Таким образом, последовательные приближения получаются по следующей схеме:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi(x_0); \\ x_2 &= \varphi(x_1); \\ x_3 &= \varphi(x_2); \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n &= \varphi(x_{n-1}). \end{aligned} \tag{3,6}$$

Определение последовательных приближений по этой схеме будем называть вторым итерационным методом.

Могут встретиться два случая:

1) последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ сходится, т. е. имеет предел, и тогда этот предел будет корнем уравнения $f(x) = 0$;

2) последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ расходится, предела не имеет.

Укажем теорему, выражающую условие, при котором итерационный процесс сходится.

Теорема. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *имеется единственный корень уравнения* $x = \varphi(x)$ *и во всех точках этого отрезка производная* $\varphi'(x)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|\varphi'(x)| \leqslant M < 1. \tag{3,7}$$

Если при этом выполняется и условие

$$a \leqslant \varphi(x) \leqslant b, \tag{3,8}$$

то итерационный процесс сходится, а за нулевое приближение x_0 *можно взять любое число из отрезка* $[a, b]$.

Условие (3,8) означает, что все приближения $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, вычисленные по схеме (3,6), находятся тоже на отрезке $[a, b]$. Сходимость итерационного процесса будет тем лучше, чем меньше $|\varphi'(x)|$.

Чтобы закончить пояснения, относящиеся к теории итерационного метода, укажем, как определить точность вычисленных значений корня. Если a — точное значение корня уравнения $x = \varphi(x)$, а число M определяется из соотношения (3,7), то справедливо следующее соотношение:

$$\left|a - x_n\right| \leqslant \frac{M}{1-M}\left|x_n - x_{n-1}\right|. \tag{3,9}$$

Из этого неравенства следует, что если поставлено условие, чтобы приближение корня x_n отличалось от его точного значения меньше на заданное число ε, то приближения $x_0, x_1, x_2, \ldots$ надо вычислять до тех пор, пока правая часть неравенства (3,9) не станет меньше этого числа ε или равной ему, т. е.

$$\frac{M}{1-M}|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon \tag{3,10}$$

или

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{\varepsilon(1-M)}{M}. \tag{3,11}$$

(Об условиях сходимости итерационных процессов и доказательство относящихся сюда теорем см.: Б. П. Демидович и И. А. Марон. Основы вычислительной математики, гл. IV. Физматгиз, 1960).

Заметим, что уравнение $f(x) = 0$ можно различными способами привести к виду $x = \varphi(x)$. Из этих видов нужно выбрать тот, в котором выполняется условие (3,7) указанной теоремы.

Что касается числа λ в формуле (3,5), то его следует подобрать так, чтобы значение производной в левой части этой формулы было по абсолютной величине меньше единицы, т. е. чтобы

$$|\varphi'(x)| = |1 + \lambda f'(x)| < 1.$$

Из неравенства

$$|1 + \lambda f'(x)| < 1$$

следует, что λ должно удовлетворять неравенству

$$0 < \lambda f'(x) < 2.$$

Такой выбор λ гарантирует сходимость итерационного процесса При решении задач этого практического занятия рекомендуется пользоваться такими таблицами:

1. Б. И. Сегал и К. А. Семендяев. Пятизначные математические таблицы.
2. Л. Дж. Комри. Шестизначные математические таблицы Чемберса.

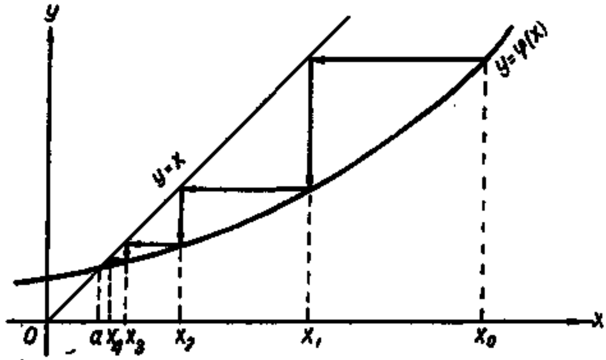
Вычисления следует вести при помощи настольной клавишной машины или арифмометра, а также в нужных случаях пользоваться логарифмической линейкой.

Геометрическая интерпретация итерационного процесса, применяемого к уравнению $x = \varphi(x)$ с учетом использования указанной теоремы, выглядит так, как показано на фиг. 3,3, где изображен сходящийся итерационный процесс. Здесь кривая пересекает биссектрису в точке с абсциссой a и при $x > a$ лежит под биссектрисой, а $\varphi'(x)$ удовлетворяет условию $0 < \varphi'(x) < 1$. Итерационный процесс сходится, а последовательные приближения монотонно убывают.

На фиг. 3,4 производная $\varphi'(x) < 0$, но по абсолютной величине меньше единицы: $|\varphi'(x)| < 1$. Итерационный процесс сходится, но приближения *колеблются* около точного значения корня.

На фиг. 3,5 показан расходящийся итерационный процесс. Здесь $\varphi'(x) > 1$. Кривая пересекает биссектрису $y = x$ в точке a и при $x > a$ лежит над биссектрисой.

На фиг. 3,6 также изображен расходящийся процесс: $|\varphi'(x)| > 1$. На чертеже видно, как последовательные «приближения» удаляются от точного значения корня.



Фиг. 3,3

Теперь приступим к решению задач.

Задача 3,1. Решить уравнение

$$f(x) = e^x - x^2 = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде (3,2)

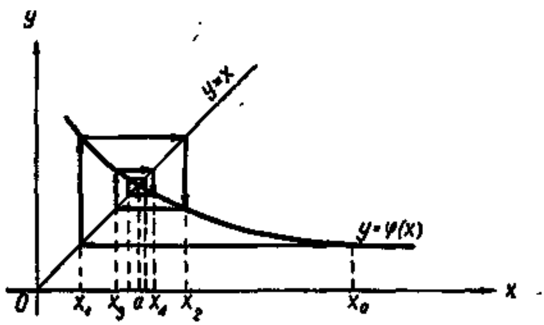
$$e^x = x^2$$

и определим графически приближенное значение отрицательного корня (положительного корня уравнение не имеет, так как при $x \geqslant 0$ $e^x > x^2$). Приближенное значение отрицательного корня примем

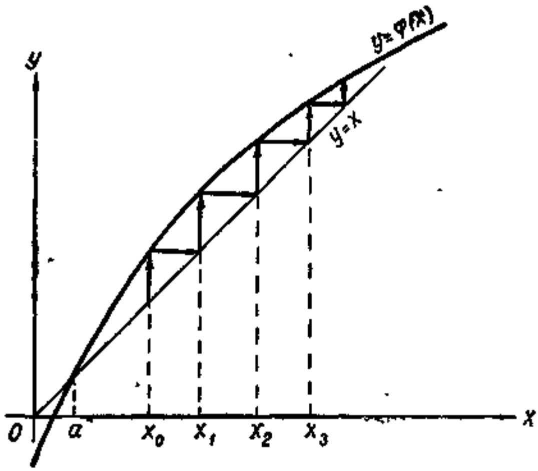
$$x_0 = -\frac{1}{2}.$$

Решим задачу сначала тем итерационным методом, который мы назвали первым, а потом — вторым.

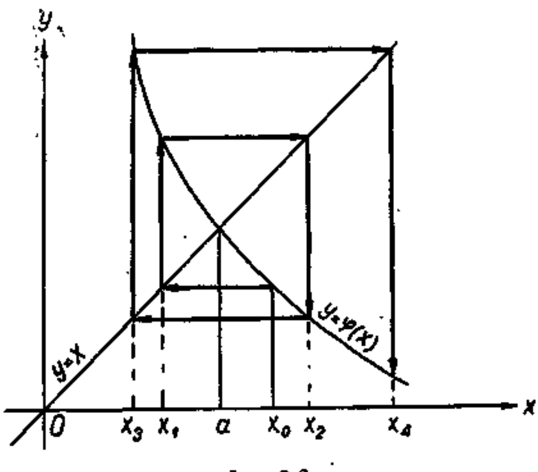
Решение первым методом. Прямая $x = -0{,}5$ пересекает кривые $\psi(x) = x^2$ и $\varphi(x) = e^x$ в двух точках. Нам следует выбрать ту из них, в которой угловой коэффициент касательной меньший



Фиг. 3,4



Фиг. 3,5



Фиг. 3,6

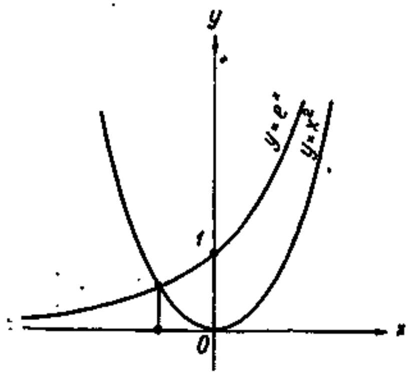
по абсолютной величине, т. е. точку, в которой абсолютное значение производной при $x = -0,5$ является меньшим. У нас

$$\psi(x) = x^2;\ \psi'(x) = 2x;\ \psi'(-0,5) = 2 \cdot (-0,5) = -1;$$
$$|\psi'(x)| = |\psi'(0,5)| = 1;$$
$$\varphi(x) = e^x;\ \varphi'(x) = e^x;\ \varphi'(-0,5) = e^{-0,5} = 0,60653;$$
$$|\varphi'(0,5)| = 0,60653.$$

Значит,

$$|\varphi'(x_0)| < |\psi'(x_0)|,$$

и *точку следует выбрать на кривой* $\varphi(x) = e^x$. Так как угловые коэффициенты касательных, проведенных в точку пересечения кривых $\varphi(x) = e^x$ и $\varphi(x) = x^2$, противоположны по знаку, то надо ожидать, что последовательные приближения будут стремиться к корню, принимая значения то больше его, то меньше.



К задаче 3,1

Чтобы найти второе приближение, необходимо определить x из уравнения

$$\psi(x) = \varphi(x_0),$$

т. е. из уравнения

$$x^2 = e^{x_0} = e^{-0,5} = 0,60653.$$

Отсюда второе приближение

$$x_1 = -\sqrt{0,60653} = -0,77880.$$

(перед радикалом взят знак минус, так как корень уравнения имеет только отрицательное значение).

Чтобы найти третье приближение корня, надо решить уравнение

$$\psi(x) = \varphi(x_1),$$

т. е.

$$x^2 = e^{x_1} = e^{-0,7788} = 0,45895;$$
$$x_2 = -\sqrt{0,45895} = -0,67746.$$

Четвертое приближение корня получим из уравнения

$$\psi(x) = \varphi(x_2),$$

т. е.

$$x^2 = e^{x_2} = e^{-0,67746} = 0,50791;$$
$$x_3 = -\sqrt{0,50791} = -0,71268.$$

Пятое приближение корня вычислим, решив уравнение

$$\psi(x) = \varphi(x_3),$$

т. е. уравнение

$$x^2 = e^{x_3} = e^{-0,71268} = 0,49033;$$

$$x_4 = -\sqrt{0,49033} = -0,70023.$$

Шестое приближение корня ищем из уравнения

$$\psi(x) = \varphi(x_4),$$

т. е. уравнения

$$x^2 = e^{x_4} = e^{-0,70023} = 0,49647;$$

$$x_5 = -\sqrt{0,49647} = -0,70460.$$

Для определения седьмого приближения решаем уравнение

$$\psi(x) = \varphi(x_5),$$

т. е.

$$x^2 = e^{x_5} = e^{-0,70460} = 0,49431;$$

$$x_6 = -\sqrt{0,49431} = -0,70307.$$

Решив уравнение

$$\psi(x) = \varphi(x_3),$$

т. е.

$$x^2 = e^{x_6} = e^{-0,70307} = 0,49506,$$

найдем восьмое приближение корня

$$x_7 = -\sqrt{0,49506} = -0,70365.$$

Для девятого приближения

$$\psi(x) = \varphi(x_7);$$

$$x^2 = e^{x_7} = e^{-0,70365} = 0,49477;$$

$$x_8 = -\sqrt{0,49477} = -0,70339.$$

Десятое приближение получим из уравнения

$$\psi(x) = \varphi(x_8),$$

т. е.

$$x^2 = e^{-0,70339} = 0,49490;$$

$$x_9 = -\sqrt{0,49490} = -0,70349.$$

Одиннадцатое приближение вычислим, решив уравнение

$$\psi(x) = \varphi(x_9),$$

т. е.

$$x^2 = e^{x_9} = e^{-0,70349} = 0,49485;$$
$$x_{10} = -\sqrt{0,49485} = -0,70346.$$

Двенадцатое приближение даст

$$x_{11} = -\sqrt{0,49487} = -0,70347.$$

Таким образом, с точностью до 0,00001 искомый корень

$$x = -0,70346.$$

Из проведениого расчета видно, что итерационный процесс шел очень медленно (сходимость была плохой). Как мы и ожидали, последовательные приближения колебались около корня. Они были то больше, то меньше. Составим таблицу приближений:

№ приближений	Приближенное значение корня	
0	−0,50000	
		−0,28880
1	−0,78880	
		+0,11134
2	−0,67746	
		−0,03522
3	−0,71268	
		+0,01245
4	−0,70023	
		−0,00437
5	−0,70460	
		+0,00153
6	−0,70307	
		−0,00058
7	−0,70365	
		+0,00026
8	−0,70339	
		−0,00010
9	−0,70349	
		+0,00003
10	−0,70346	
		−0,00001
11	−0,70347	

В этой таблице справа от значения приближений корня стоят разности между этими значениями. Знаки разностей чередуются (+, −, +, −, ...), а сами они по абсолютной величине убывают. Медленная сходимость процесса объясняется тем, что нулевое приближение x_0 было определено слишком грубо. Если бы мы определили интервал, на котором находится корень, и подошли бы более критично к выбору нулевого приближения, то процесс сходимости ускорился бы.

Чтобы убедиться в этом, найдем интервал, на котором находится корень. Для этого нужно определить так называемую «вилку», т. е. найти такие два значения x, при которых $f(x)$ имеет противоположные знаки. Эти два значения x и определят искомый интервал, причем его надо сделать как можно меньшим и следить за тем, чтобы на нем был единственный корень уравнения. В нашем случае имеется единственный отрицательный корень. Методом проб определим «вилку». У нас $f(x) = e^x - x^2$. Начнем со значения $x = -0,6$.

$$f(-0,6) = 0,54881 - 0,36 = 0,18881 > 0;$$
$$f(-0,7) = 0,49659 - 0,49 = 0,00659 > 0;$$
$$f(-0,8) = 0,44933 - 0,64 = -0,19067 < 0.$$

Таким образом, на концах интервала $(-0{,}8; -0{,}7)$ функция $f(x)$ имеет различные знаки, причем, поскольку $|f(-0{,}7)| < |f(-0{,}8)|$, то корень находится ближе к $-0{,}7$, чем к $-0{,}8$.

Попытаемся сузить интервал. Правый его конец оставим без изменения, левый сдвинем направо

$$f(-0{,}75) = 0{,}49237 - 0{,}49 < 0,$$

а поскольку $f(-0{,}7) > 0$, то корень находится на интервале $(-0{,}75; -0{,}7)$.

Попытаемся сузить и этот интервал, сдвигая его левый конец вправо

$$f(-0{,}725) = 0{,}48432 - 0{,}52562 = -0{,}04130 < 0.$$

Так как $f(-0{,}725) < 0$, а $f(-0{,}7) > 0$, то корень находится на интервале $(-0{,}725; -0{,}7)$. В качестве нулевого приближения можно взять любой из концов этого интервала, а также любую точку внутри его.

Мы возьмем за x_0 правый конец интервала, т. е. $x_0 = -0{,}7$. Следующее второе приближение найдем из уравнения

$$\psi(x) = \varphi(x_0).$$

У нас $\psi(x) = x^2$, $\varphi(x) = e^x$. Поэтому надо определить x из уравнения

$$x^2 = e^{x_0} = e^{-0{,}7} = 0{,}49659; \quad x_1 = -0{,}70469.$$

Третье приближение найдем из уравнения

$$\psi(x) = \varphi(x_1),$$

т. е. из уравнения

$$x^2 = e^{x_1} = e^{-0{,}70469} = 0{,}49494;$$

$$x_2 = -\sqrt{0{,}49494} = -0{,}70352.$$

Четвертое приближение

$$\psi(x) = \varphi(x_2);$$

$$x^2 = e^{-0{,}70352} = 0{,}49484;$$

$$x_3 = -\sqrt{0{,}49484} = -0{,}70345.$$

Этот корень, найденный в четвертом приближении, отличается от полученного раньше в двенадцатом приближении только на 0,00002.

Пятое приближение

$$\psi(x) = \varphi(x_3);$$

$$x^2 = e^{x_3} = e^{-0{,}70345} = 0{,}49488.$$

Таким образом, на *пятом* приближении мы имеем теперь то, что раньше на *двенадцатом*. Отсюда видно, насколько важно выбрать удачно нулевое приближение.

Всю предыдущую работу мы выполнили исключительно в методических целях: 1) на большом числе упражнений читатель освоился с решением уравнения вида $\psi(x)=\varphi(x)$ и 2) было показано, что выбор нулевого приближения не может быть произвольным, а его удачный выбор скорее ведет к цели.

Теперь для решения того же уравнения используем метод, который мы назвали вторым: преобразуем заданное уравнение к виду (3,4)

$$x=\varphi(x)$$

и применим схему (3,6) для его решения.

Из уравнения $e^x-x^2=0$ следует, что $x^2=e^x$, а $x=-\sqrt{e^x}$ (перед радикалом удержан знак минус потому, что корень, как мы знаем, отрицателен).

В виде (3,4) уравнение запишется так:

$$x=-e^{\frac{x}{2}}.$$

Теперь проверим, выполнено ли условие (3,7), т. е. выполняется ли во всех точках интервала (—0,725; —0,7) неравенство

$$|\varphi'(x)|<1.$$

С этого всегда надо начинать решение уравнения вида (3,4). У нас

$\varphi(x)=-e^{\frac{x}{2}}$; $\varphi'(x)=-\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$;

$$|\varphi'(-0{,}725)|=0{,}34727;\ |\varphi'(-0{,}7)|=0{,}35230,$$

число M в формуле (3,7) возьмем равным 0,36. Так как $|\varphi'(x)|<1$, то *процесс будет сходиться*. Мы хотим вычислить корень с точностью 0,00001, т. е. $\varepsilon=0{,}00001$. Надо остановиться на каком-то приближении. Для этого определим по формуле (3,11), какой по абсолютной величине должна быть разность между двумя последовательными приближениями, чтобы считать, что требуемая точность достигнута. Должно выполняться на основании (3,11) неравенство

$$|x_n-x_{n-1}|\leqslant\frac{\varepsilon(1-M)}{M}.$$

Так как $M=0{,}36$; $\varepsilon=0{,}00001$, то

$$|x_n-x_{n-1}|\leqslant\frac{0{,}00001\cdot(1-0{,}36)}{0{,}36}=0{,}0000177.$$

Таким образом, мы будем считать, что требуемая точность достигнута, если абсолютная величина разности двух последовательных приближений не больше 0,00002.

За нулевое приближение принимаем по-прежнему $x_0 = -0,7$. Так как у нас $\varphi(x) = -e^{\frac{x}{2}}$, то, применяя схему (3,6) к уравнению

$$x = -e^{\frac{x}{2}}$$

и помещая вычисления в таблицу, получаем

x	$\frac{x}{2}$	$-e^{\frac{x}{2}}$
$-0,7$	$-0,35$	$-0,70460$
$-0,70460$	$-0,35230$	$-0,70307$
$-0,70307$	$-0,35154$	$-0,70360$
$-0,70360$	$-0,35180$	$-0,70342$
$-0,70342$	$-0,35171$	$-0,70348$
$-0,70348$	$-0,35174$	$-0,70346$
$-0,70346$		

Абсолютная величина разности между x_5 — шестым приближенным и x_6 — седьмым приближенным равна 0,00002. Поэтому на основании сделанного по формуле (3,11) вычисления можно считать, что требуемая точность достигнута и за искомый корень принять любое из этих чисел, т. е.

$$x = -0,70346 \text{ или } x = -0,70348.$$

От найденного первым методом $x = -0,70347$ эти значения отличаются только на 0,00001.

Читатель, по-видимому, заметил, что решение этим методом оказалось проще, поскольку вычисления велись без извлечения корня, как при решении первым методом, и все свелось только к вычислению степеней числа e. Быстрая сходимость здесь объяснялась тем, что число M было ближе к нулю, чем к единице. На этом примере мы подробно разобрали первый и второй методы. Сделаем такое указание. Первый метод следует применять только тогда, когда преобразование уравнения $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$ представляет большие трудности. Во всех других случаях надо стремиться к тому, чтобы заданное уравнение было преобразовано к виду $x = \varphi(x)$. Такое преобразование часто можно осуществить, как уже указывалось, не единственным способом, причем выбрать тот из видов, в котором число M было бы возможно меньшим, так как при этом последовательность приближений будет быстрее сходиться к корню заданного уравнения.

Повторим еще раз, что решение необходимо начинать с проверки выполнения неравенства (3,7)

$$|\varphi'(x)| < 1$$

во всех точках того интервала, на котором находится корень.

Задача 3,2. Решить уравнение

$$f(x) = \cos x - x + 4 = 0$$

с точностью до 0,00001.

Решение. Преобразуем уравнение к виду (3,4) $x = \varphi(x)$. Получится

$$x = \cos x + 4.$$

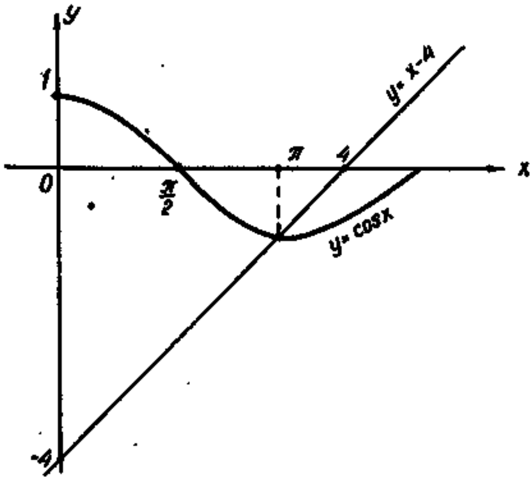
Значит,

$$\varphi(x) = \cos x + 4 \qquad \text{(A)}$$

Теперь, чтобы легче было графически определить приближенное значение корня (см. рисунок), запишем уравнение в виде: $\cos x = x - 4$. Абсцисса точки пересечения кривых приближенно равна 3. Проверим, что корень находится на интервале $(3, \pi)$:

$$f(3) = \cos 3 - 3 + 4 = -0{,}98999 + 1 = 0{,}01001 > 0;$$

$$f(\pi) = \cos \pi - \pi + 4 = -1 - 3{,}14159 + 4 = -0{,}14159 < 0.$$



К задаче 3,2

Таким образом, «вилка» найдена. За нулевое приближение корня надо взять число 3 — левый конец интервала, так как на этом конце $|f(3)| < |f(\pi)|$. Теперь установим, будет ли сходиться итерационный процесс, т. е. выполняется ли неравенство (3,7)

$$|\varphi'(x)| < 1$$

во всех точках интервала $(3, \pi)$. Из (A) следует, что

$$\varphi(x) = \cos x + 4; \; \varphi'(x) = -\sin x;$$

$$|\varphi'(x)| = \sin x; \; |\varphi'(3)| = \sin 3 = 0{,}14122;$$

$$|\varphi'(\pi)| = \sin \pi = 0.$$

Во всех точках интервала $(3, \pi)$ $|\varphi'(x)| < 1$ и тем самым неравенство (3,7) выполняется, процесс будет сходящимся, причем в качестве числа M необходимо взять 0,15, так как и $\sin 3$ и $\sin \pi$ меньше, чем 0,15. Итак, $M = 0,15$. Теперь определим, какой должна быть абсолютная величина разности между двумя последовательными приближениями x_n и x_{n-1}, чтобы обеспечить требуемую точность в 0,00001.

У нас $\varepsilon = 0,00001$, $M = 0,15$, а потому по формуле (3,11)

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{\varepsilon(1-M)}{M} = \frac{0,00001 \cdot (1-0,15)}{0,15} = \frac{0,00001 \cdot 0,85}{0,15} = 0,00006,$$

т. е.

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant 0,00006. \qquad (A)$$

Таким образом, если между двумя последовательными приближениями разность не будет превышать 0,00006, то итерационный процесс надо остановить и считать, что требуемая точность достигнута.

После этих выкладок приступаем к решению задачи, пользуясь схемой (3,6). У нас нулевое приближение

$$x_0 = 3.$$

Применим схему (3,6);

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varphi(x_0) = \cos 3 + 4 = -0,98999 + 4 = 3,01001;\\
x_2 &= \varphi(x_1) = \cos 3,01001 + 4 = -0,99135 + 4 = 3,00865;\\
x_3 &= \varphi(x_2) = \cos 3,00865 + 4 = -0,99117 + 4 = 3,00883;\\
x_4 &= \varphi(x_3) = \cos 3,00883 + 4 = -0,99120 + 4 = 3,00880.
\end{aligned}$$

На этом можно остановиться, так как

$$|x_4 - x_3| < 0,00006,$$

т. е. требование (A) выполнено.

Такая быстрая сходимость обусловлена здесь малостью числа M и удачным выбором нулевого приближения.

Итак, искомый корень

$$x = 3,00880.$$

Задача 3,3. Решить уравнение

$$2x - 3\ln x - 3 = 0$$

с точностью до 0,00001.

Решение. Преобразуем прежде всего заданное уравнение к такому виду, который позволит легче графически установить приближенное значение корня. Запишем уравнение в виде

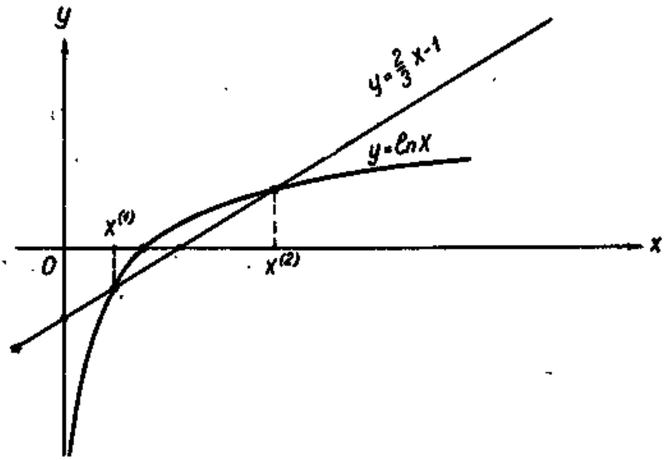
$$\ln x = \frac{2x-3}{3}, \quad \text{или} \quad \ln x = \frac{2}{3}x - 1.$$

Построим кривые $y = \ln x$ и $y = \frac{2}{3}x - 1$ (см. рисунок). Из чертежа видно, что имеется два положительных корня. Определим интервалы, в которых они содержатся.

Меньший корень $x^{(1)}$ находится на интервале (0,5; 0,6). Действительно,

$$f(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}5 - 3\ln 0{,}5 - 3 = 1 - 3 \cdot (-0{,}69315) - 3 = \\ = 0{,}07945 > 0;$$

$$f(0{,}6) = 2 \cdot 0{,}6 - 3\ln 0{,}6 - 3 = 1{,}2 - 3 \cdot (-0{,}51083) - 3 = \\ = -0{,}26751 < 0.$$



К задаче 3,3

Таким образом, первый корень находится на интервале (0,5; 0,6), причем ближе к левому его концу, так как $|f(0{,}5)| < |f(0{,}6)|$. Поэтому за нулевое приближение меньшего корня следует принять $x_0^{(1)} = 0{,}5$.

Теперь преобразуем заданное уравнение к виду $x = \varphi(x)$:

$$x = 0{,}5\,(3\ln x + 3). \qquad \text{(A)}$$

Вслед за этим определим, будет ли сходящимся итерационный процесс. Для этого проверим выполнение для $\varphi'(x)$ неравенства (3,7): $|\varphi'|(x)| < 1$ во всех точках интервала (0,5; 0,6). У нас

$$\varphi(x) = 0{,}5\,(3\ln x + 3); \quad \varphi'(x) = \frac{0{,}5 \cdot 3}{x} = \frac{1{,}5}{x}.$$

Очевидно, что на интервале (0,5; 0,6) изоляции корня $\varphi'(x) > 1$

и, значит, условие (3,7) не выполнено. Поэтому представим уравнение в другом виде. Из заданного уравнения

$$2x - 3\ln x - 3 = 0$$

следует, что

$$\ln x = \frac{2}{3}x - 1,$$

а

$$x = e^{\frac{2}{3}x - 1}. \qquad (B)$$

Теперь уже

$$\varphi(x) = e^{\frac{2}{3}x-1}; \quad \varphi'(x) = \frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}x-1};$$

$$\varphi'(0,5) = \frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}\cdot 0,5-1} = \frac{2}{3}e^{-0,66667} = \frac{2}{3}\cdot 0,51342 = 0,34228;$$

$$\varphi'(0,6) = \frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}\cdot 0,6-1} = \frac{2}{3}e^{-0,6} = \frac{2}{3}\cdot 0,54881 = 0,36587.$$

Таким образом, на интервале (0,5; 0,6) условие $|\varphi'(x)| < 1$ выполнено и итерационный процесс будет сходящимся. Возьмем $M = 0,37$. У нас $\varepsilon = 0,00001$. Определим по формуле (3,11), какой должна быть разность между двумя последовательными приближениями, чтобы мы имели право считать, что заданная точность достигнута.

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{\varepsilon(1-M)}{M} = \frac{0,00001\cdot(1-0,37)}{0,37} =$$

$$= \frac{0,00001\cdot 0,63}{0,37} \approx 0,00002.$$

Если абсолютная величина этой разности будет меньше или равна 0,00002, то процесс итерации следует прекратить и считать, что заданная точность достигнута.

За нулевое приближение меньшего корня возьмем, как мы условились, $x_0^{(1)} = 0,5$. Применим итерационную схему (3,6) к уравнению (B).

Вычисления удобно вести с помощью такой таблицы:

x	$\frac{2}{3}x$	$\frac{2}{3}x-1$	$e^{\frac{2}{3}x-1}$
0,5	0,33333	−0,66667	0,51342
0,51342	0,34228	−0,65772	0,51803
0,51803	0,34536	−0,65464	0,51963
0,51963	0,34642	−0,65358	0,52018
0,52018	0,34679	−0,65321	0,52037
0,52037	0,34692	−0,65308	0,52044
0,52044	0,34696	−0,65304	0,52046
0,52046	0,34698	−0,65302	0,52047

На этом процесс итерации можно остановить и считать, что

$$x^{(1)} = 0{,}52047.$$

Приступим к определению большего положительного корня. Прежде всего, определим интервал, в котором он находится. Из чертежа к этой задаче видно, что второй корень $x^{(2)} \approx 3$.

Рассмотрим интервал (3,2; 3,3). У нас

$$f(x) = 2x - 3\ln x - 3;$$

$$f(3{,}2) = 2 \cdot 3{,}2 - 3\ln 3{,}2 - 3 = 6{,}4 - 3{,}48549 - 3 = -0{,}08549 < 0;$$

$$f(3{,}3) = 2 \cdot 3{,}3 - 3\ln 3{,}3 - 3 = 6{,}6 - 3{,}58177 - 3 = 0{,}01823 > 0.$$

Корень ближе к правому концу интервала его изоляции, так как $|f(3{,}3)| < |f(3{,}2)|$, поэтому за нулевое приближение большего корня $x^{(2)}$ возьмем $x_0^{(2)} = 3{,}3$.

Исследуем теперь, будет ли сходящимся процесс, если пользоваться уравнением (А):

$$x = 0{,}5\,(3\ln x + 3).$$

Здесь

$$\varphi(x) = 0{,}5\,(3\ln x + 3); \quad \varphi'(x) = \frac{1{,}5}{x};$$

$$\varphi'(3{,}2) = \frac{1{,}5}{3{,}2} = 0{,}47; \quad \varphi'(3{,}3) = \frac{1{,}5}{3{,}3} = 0{,}45.$$

Возьмем $M = 0{,}48$. Таким образом, итерационный процесс будет сходящимся.

Теперь определим, какой должна быть абсолютная величина разности между двумя последовательными приближениями, чтобы считать достигнутой заданную точность. У нас $M = 0{,}48$; $\varepsilon = 0{,}00001$. По формуле (3,11) должно быть

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{\varepsilon(1-M)}{M} = \frac{0{,}00001 \cdot (1 - 0{,}48)}{0{,}48} =$$

$$= \frac{0{,}00001 \cdot 0{,}52}{0{,}48} \approx 0{,}00001.$$

Как только разность между двумя последовательными приближениями станет не больше 0,00001, мы процесс остановим. Все вычисления поместим в таблицу. Итак, решается уравнение

$$x = 0{,}5\,(3\ln x + 3),$$

а

$$x_0^{(2)} = 3{,}3.$$

x	$\ln x$	$3\ln x$	$3\ln x + 3$	$0,5(3\ln x + 3)$
3,3	1,19392	3,58176	6,58176	3,29088
3,29088	1,19116	3,57448	6,57448	3,28724
3,28724	1,19005	3,57015	6,57015	3,28508
3,28508	1,18939	3,56817	6,56817	3,28408
3,28408	1,18909	3,56727	6,56727	3,28364
3,28364	1,18895	3,56685	6,56685	3,28342
3,28342	1,18889	3,56670	6,56670	3,28335
3,28335	1,18886	3,56658	6,56658	3,28329
3,28329	1,18884	3,56652	6,56652	3,28326
3,28326	1,18883	3,56649	6,56649	3,28324
3,28324	1,18883	3,56649	6,56649	3,28324
3,28324	1,18883	3,56649	6,56649	3,28324

Больший корень

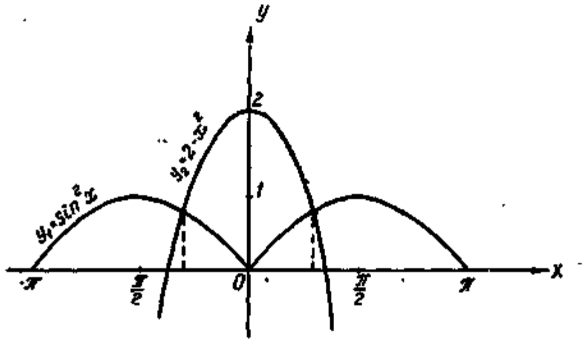
$$x^{(2)} = 3,28324.$$

И здесь итерационный процесс шел очень медленно, так как M было достаточно велико.

Задача 3,4. Решить уравнение

$$f(x) = x^2 + \sin^2 x - 2 = 0.$$

Точность 0,0001.



К задаче 3,4

Решение. Из решения предыдущих задач читатель уяснил общую схему, которой мы придерживались. Она состоит в следующем:

1. Заданное уравнение следует привести к виду

$$x = \varphi(x).$$

2. Чтобы графически отделить корень, функцию $f(x)$ надо представить в виде

$$\psi(x) = \varphi(x).$$

Так можно определить приближенное значение корня. Отделить корень следует методом проб.

3. Необходимо проверить, удовлетворяет ли функция $\varphi(x)$ из п. 1 условию (3,7)

$$|\varphi'(x)| < 1$$

во всех точках интервала изоляции корня.

4. Определить число M для использования неравенства (3,11), т. е. для того чтобы узнать, при какой абсолютной величине разности между двумя последовательными приближениями будет достигнута требуемая точность.

5. Решение задачи провести по схеме (3,6).

Придерживаясь этой схемы, решим предложенное уравнение.

1. Перепишем уравнение в виде

$$x^2 = 2 - \sin^2 x = 1 + \cos^2 x,$$

откуда

$$x = \pm\sqrt{1 + \cos^2 x}. \qquad \text{(A)}$$

2. Для того чтобы упростить построение графика функции $y = f(x)$, перепишем уравнение

$$\sin^2 x = 2 - x^2.$$

Из чертежа видно, что корни расположены симметрично относительно начала координат. Отделение корня дает

$$f(1) = 1^2 + \sin^2 1 - 2 = 1 + 0{,}70728 - 2 = -0{,}29272 < 0;$$

$$f(1{,}1) = 1{,}1^2 + \sin^2 1{,}1 - 2 = 1{,}21 + 0{,}79388 - 2 = 0{,}00388 > 0.$$

Значение корня будет ближе к 1,1, чем к 1, так как

$$|f(1{,}1)| < |f(1)|.$$

Таким образом, интервал изоляции корня определен.

3. Проверка условия (3,7). Из (А) следует, что

$$|\varphi(x)| = \sqrt{1 + \cos^2 x};$$

$$|\varphi'(x)| = \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}.$$

Вычислим $|\varphi'(1)|$ и $|\varphi'(1{,}1)|$, причем большая точность при этом не требуется:

$$|\varphi'(1)| = 0{,}40; \quad |\varphi'(1{,}1)| = 0{,}38.$$

Процесс будет сходиться, так как

$$|\varphi'(x)| < 1$$

во всех точках интервала изоляции корня.

4. Число M возьмем равным 0,41. Теперь определим по формуле (3,11), какой должна быть абсолютная величина разности между двумя последовательными приближениями, чтобы считать требуемую точность достигнутой.

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{\varepsilon(1-M)}{M} = \frac{0{,}0001\cdot(1-0{,}41)}{0{,}41} = \frac{0{,}0001\cdot 0{,}59}{0{,}41} \approx 0{,}0001.$$

Таким образом, когда разность между двумя последовательными приближениями будет равна 0,0001, итерационный процесс следует остановить.

5. Воспользуемся схемой (3,6) для вычисления корня уравнения. Исходное уравнение имеет вид

$$x = \sqrt{1+\cos^2 x};\quad x_0 = 1{,}1.$$

Все вычисления поместим в таблицу:

x	$\cos x$	$\cos^2 x$	$1+\cos^2 x$	$\sqrt{1+\cos^2 x}$
1,1	0,45360	0,20575	1,20575	1,09806
1,09806	0,45532	0,20732	1,20732	1,09878
1,00878	0,45468	0,20673	1,20673	1,09851
1,09851	0,45492	0,20695	1,20695	1,09861
1,09861				

Округляя до четырех десятичных знаков, получаем два соседних приближения

$$x_3 = 1{,}0985;\quad x_4 = 1{,}0986.$$

Быстрота сходимости объясняется здесь удачным выбором нулевого приближения, сравнительно небольшим значением числа M и небольшой заданной точностью. Итак, уравнение имеет два решения

$$x^{(1)} = -1{,}0985;\quad x^{(2)} = 1{,}0985.$$

Задача 3,5. Найти наименьший положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg} x - x = 0$$

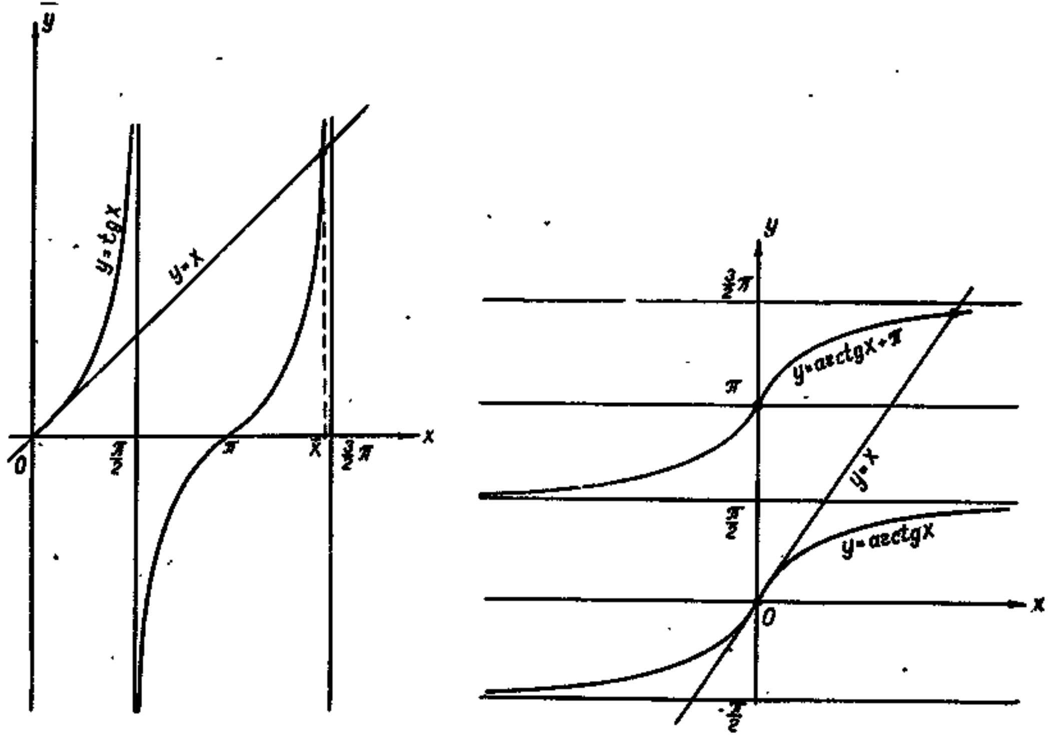
с точностью до 0,0001.

Решение. 1) Представим уравнение в виде

$$x = \varphi(x)$$

В нашем случае оно будет таким:

$$x = \operatorname{tg} x.$$



К задаче 3,5

2) Построим графики функций $y = x$ и $y = \operatorname{tg} x$ (см. чертеж к этой задаче). Легко усмотреть, что за нулевое приближение можно принять $x_0 = \frac{3}{2}\pi$. Таким образом корень находится на интервале $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$.

3) Проверяем выполнение условия (3,7):

$$\varphi(x) = \operatorname{tg} x; \quad \varphi'(x) = \sec^2 x.$$

Внутри интервала изоляции корня $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right) |\varphi'(x)| > 1$, поэтому условие (3,7) нарушено. Непосредственно видно, что если бы мы вели решение по уравнению

$$x = \operatorname{tg} x$$

и взяли $x_0 = \frac{3}{2}\pi$, то уже второе приближение не могло бы быть найдено. Действительно,

$$x_1 = \operatorname{tg} x_0 = \operatorname{tg}\frac{3}{2}\pi = \pm\infty.$$

Поэтому уравнение перепишем в другом виде, а именно

$$x = \operatorname{arctg} x + \pi; \quad x_0 = \frac{3}{2}\pi = 4{,}71237.$$

Вычисления помещаем в таблицу. Следует иметь в виду, что к значениям $\operatorname{arctg} x$, которые находятся из таблиц (например, Чемберса) следует прибавлять число π, так как прямая $y = x$ пересекает ту ветвь кривой $y = \operatorname{arc\,tg} x$, которая удовлетворяет условию

$$\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{3}{2}\pi,$$

т. е. фактически

$$x = \operatorname{arctg} x + \pi.$$

x	$\operatorname{arctg} x$	π	$\operatorname{arc\,tg} x + \pi$
4,71237	1,36169	3,14159	4,50328
4,50328	1,35227	3,14159	4,48386
4,49386	1,35185	3,14159	4,49344
4,49344	1,35182	3,14159	4,49341
4,49341	1,35182	3,14159	4.49341

Таким образом, искомым корнем с четырьмя верными знаками является

$$x = 4{,}49341.$$

Ниже помещены задачи для самостоятельного решения.

Задача 3,6. Методом итерации найти корень уравнения

$$x^7 - 2x^5 - 10x^2 + 1 = 0$$

с пятью верными десятичными знаками.

Указание. Уравнение переписать в виде

$$x = \sqrt{0,1 - 0,2x^5 + 0,1x^7}.$$

Ответ. $x = 0,31529$.

Задача 3,7. Вычислить с четырьмя верными десятичными знаками действительный корень уравнения

$$x^2 + 4\sin x = 0.$$

Ответ. $x = -0,9338$.

Задача 3,8. Определить с шестью верными знаками корень уравнения

$$3x - \cos x - 1 = 0.$$

Ответ. $x = 0,607104$.

Задача 3,9. Найти корень уравнения

$$2x - \log_{10} x = 7$$

с точностью до 0,0001.

Ответ. $x = 3,7893$.

Содержание. Основные определения теории матриц

I. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МАТРИЦ

1. Матрица и ее элементы

Матрицей называется система элементов (в частном случае чисел), расположенных в определенном порядке и образующих таблицу. Если в этой таблице m строк и n столбцов, а ее элементы обозначены через a_{ij}, где i — номер строки, а j — номер столбца, на пересечении которых находится этот элемент, то матрица записывается в следующем виде:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (4,1)$$

Короче эта матрица может быть записана так:

$$A = [a_{ij}]^*,\ (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n) \qquad (4,2)$$

Каждый элемент матрицы называется также ее компонентой. Матрица (4,1) имеет размер $m \times n$.

Если число строк матрицы m не равно числу ее столбцов n, то матрица называется *прямоугольной*.

2. Различные виды матриц

Матрица-столбец. Если в матрице только один столбец, т. е. если $n = 1$, то она называется матрицей-столбцом и имеет такой вид:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}. \qquad (4,3)$$

Матрица-столбец называется также вектором-столбцом.

* Матрицы в дальнейшем обозначаются знаком [ ], а определители квадратных матриц — знаком | |.

Матрица-строка. Если в матрице только одна строка, то она называется матрицей-строкой и имеет такой вид;

$$A = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \cdots a_{1n}]. \tag{4,4}$$

Матрица-строка называется также вектором-строкой.

Примеры.

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

есть матрица-столбец. Ее размер 5×1. Иначе, это пятимерный вектор-столбец.

Матрица

$$A = [2 \quad 0 \quad 4 \quad 3 \quad 7 \quad 2]$$

есть матрица-строка. Ее размер 1×6. Иначе, это шестимерный вектор-строка. Когда это не может вызвать недоразумений, вектор-столбец и вектор-строку мы будем называть просто вектором.

Транспонированная матрица. Если в матрице A поменять местами строки и столбцы, то получится новая матрица, которая по сравнению с матрицей A называется транспонированной. Транспонированную матрицу будем обозначать через A'.

Примеры.

1) Если матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix},$$

то транспонированная матрица запишется так:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}.$$

Матрица A имеет размер 3×4, а транспонированная матрица A' — размер 4×3.

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$

Транспонированная матрица

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Транспонирование матрицы-столбца дает матрицу-строку и наоборот.

Квадратная матрица. Если в матрице столько же строк, сколько и столбцов, т. е. $m = n$, то матрица называется квадратной.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (4,5)$$

Матрица (4,5) имеет размер $n \times n$. Однако в случае квадратной матрицы вместо термина *размер* употребляется термин *порядок*. Матрица (4,5) — матрица n-го порядка. В квадратной матрице об элементах a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn} говорят, что они образуют *главную* диагональ, или что они стоят на главной диагонали. Об элементах, стоящих на линиях, параллельных главной диагонали, говорят, что они образуют *побочную* диагональ. В матрице порядка n имеется $n - 1$ побочная диагональ, расположенная выше главной, и $n - 1$ побочная диагональ, расположенная ниже ее.

Пример.

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

— квадратная матрица четвертого порядка. В ней число строк $m = 4$ и число столбцов $n = 4$.

Нулевая матрица. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой и обозначается символом 0.

$$0 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{n \text{ столбцов}} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\\0\end{matrix}}\right\} m \text{ строк} \qquad (4,6)$$

Диагональная матрица. Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю, называется диагональной. Эта матрица имеет следующий вид:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (4,7)$$

Таким образом, в диагональной матрице все элементы с неравными индексами равны нулю.

Скалярная матрица. Диагональная матрица, все элементы которой, стоящие на главной диагонали, равны между собой, называется скалярной матрицей. Скалярная матрица имеет такой вид:

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{11} \end{bmatrix}. \quad (4,8)$$

Единичная матрица. Диагональная матрица, у которой все элементы, стоящие на главной диагонали, равны 1, называется единичной. Единичная матрица обозначается символом E и имеет такой вид:

$$E_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (4,9)$$

Индекс n в символе E показывает порядок единичной матрицы. В матричном исчислении единичная матрица играет роль, в известной мере аналогичную той, которую в арифметике играет единица.

Верхняя треугольная матрица. Квадратная матрица, в которой все элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю, называется верхней треугольной матрицей. Она имеет вид

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (4,10)$$

Нижняя треугольная матрица. Квадратная матрица, в которой все элементы, расположенные выше главной диагонали, равны нулю, называется нижней треугольной матрицей. Эта матрица имеет такой вид:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{4,11}$$

Симметричная матрица. Симметричной матрицей называется квадратная матрица, в которой все элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны между собой. Для симметричной матрицы имеет место равенство

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Пример квадратной симметричной матрицы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}. \tag{4,12}$$

Блочная матрица. Если в матрице провести горизонтальные и вертикальные «перегородки», то матрица окажется разбитой на прямоугольные или квадратные клетки, или блоки. Такая матрица называется блочной. Вот пример такой матрицы:

$$A = \left[\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ \hdashline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{array}\right].$$

Элементы в каждом блоке образуют следующие матрицы:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad A_{21} = \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{bmatrix};$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{bmatrix}; \quad A_{22} = \begin{bmatrix} a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{bmatrix}.$$

Матрицу A можно представить в виде матрицы, элементами которой являются матрицы A_{ij}.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

3. Определитель матрицы. Ранг матрицы

Определителем квадратной матрицы называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных так же, как и в матрице. Определитель матрицы A обозначается символом $|A|$ или $D(A)$.

Если определитель $|A|$ матрицы не равен нулю, то матрица называется *неособенной* (иначе, невырожденной). Если же определитель $|A|$ матрицы равен нулю, то матрица называется *особенной* (иначе, вырожденной или сингулярной).

Ранг матрицы. В прямоугольной матрице можно вычеркнуть несколько строк и несколько столбцов так, чтобы элементы, которые остались невычеркнутыми, образовали квадратную матрицу порядка k. Определитель такой матрицы называется минором данной матрицы. Если, например (стр. 92) взять матрицу размером 3×4, то вычеркиванием одного какого-либо столбца можно получить четыре квадратных матрицы третьего порядка, вычеркиванием двух столбцов и одной строки можно получить 18 матриц второго порядка, а вычеркиванием трех столбцов и двух строк можно получить 12 матриц первого порядка.

Число матриц порядка k ($k \leqslant \min(s, r)$), которое можно получить из матрицы размером $s \times r$, подсчитывается по формуле

$$n = C_s^k \cdot C_r^k,$$

где C_s^k и C_r^k есть соответственно число сочетаний из s элементов по k в каждом и из r элементов по k в каждом, причем число сочетаний из n элементов по m вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \quad (n \geqslant m).$$

Поскольку в указанной выше матрице $s = 3$, $r = 4$, число миноров порядка $k = 3$

$$n = C_3^3 \cdot C_4^3 = \frac{3!}{3!\,(3-3)!} \cdot \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = 4$$

(надо учесть, что принимается $0! = 1$).
Число миноров порядка $k = 2$

$$n = C_3^2 \cdot C_4^2 = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} \cdot \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = 3 \cdot 6 = 18.$$

Число миноров порядка $k = 1$

$$n = C_3^1 \cdot C_4^1 = \frac{3!}{1!\,(3-1)!} \cdot \frac{4!}{1!\,(4-1)!} = 3 \cdot 4 = 12.$$

Рассмотрим определители всех таких квадратных матриц. *Наибольший порядок r минора* матрицы, *не равного нулю, называется рангом матрицы*. Так, если в матрице размером 3×4 определители всех матриц третьего порядка равны нулю, а хотя бы один из определителей матриц второго порядка в этой таблице не равен нулю, то ранг заданной матрицы r равен двум ($r = 2$).

Таким образом, чтобы определить ранг матрицы, надо из ее элементов составить всевозможные квадратные матрицы вычеркиванием строк и столбцов и найти определители этих матриц. Ранг заданной матрицы равен наивысшему порядку того из этих определителей, который не равен нулю.

Ранг нулевой матрицы равен нулю. Ранг диагональной квадратной матрицы равен ее порядку, конечно, при условии, что ни один из ее диагональных элементов не равен нулю.

Заданная матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}.$$

Матрицы 3-го порядка, полученные из заданной вычеркиванием одного столбца:

Номер вычеркнутого столбца			
1	2	3	4
$\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Матрицы 2-го порядка, полученные из заданной вычеркиванием двух столбцов и одной строки:

Номер вычеркнутой строки	Номера вычеркнутых столбцов					
	1 и 2	1 и 3	1 и 4	2 и 3	2 и 4	3 и 4
1	$\begin{bmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Матрицы 1-го порядка, полученные из заданной матрицы вычеркиванием трех столбцов и двух строк:

Номера вычеркнутых строк	Номера вычеркнутых столбцов			
	2, 3 и 4	3, 4 и 1	4, 1 и 2	1, 2 и 3
2 и 3	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
3 и 1	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
1 и 2	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

4. Алгебраическое дополнение элемента матрицы. Союзная матрица

Если из определителя квадратной матрицы порядка n вычеркнуть i-ую строку и j-ый столбец, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}, и составить из оставшихся элементов определитель порядка $n-1$, умножив его на $(-1)^{i+j}$, где $i+j$ — сумма номеров вычеркнутой строки и столбца, то полученное произведение называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы и обозначается символом A_{ij}.

Союзная матрица. Если из алгебраических дополнений всех элементов матрицы A составить новую матрицу и транспонировать ее, то полученная так матрица называется союзной по отношению к данной. Союзная матрица обозначается символом $\tilde{A}$ и записывается так:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (4,13)$$

Союзная матрица $\tilde{A}$ называется также **присоединенной.**

5. Формула для вычисления определителей

С вычислением определителей приходится встречаться во многих случаях. Укажем весьма удобную формулу для вычисления определителя n-го порядка:

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{n,n-1} & a_{nn}
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \frac{1}{a_{11}^{n-2}}
\begin{vmatrix}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \ldots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{2,n-1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \ldots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,n-1} \\ a_{31} & a_{3,n-1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} \ldots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,n-1} \\ a_{n1} & a_{n,n-1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix}
\end{vmatrix}. \qquad (4,14)
$$

Предполагается, что $a_{11} \neq 0$. Если $a_{11} = 0$, то перестановкой строк и столбцов всегда можно из данного определителя получить такой, в котором $a_{11} \neq 0$. Эта формула очень проста в употреблении и позволяет вычисление определителя порядка n свести к вычислению определителя порядка $n-1$.

II. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НАД МАТРИЦАМИ

1. **Равенство матриц.** Две матрицы A и B называются равными, если: 1) обе они имеют один и тот же размер, т. е. если число строк матрицы A равно числу строк матрицы B, а число столбцов матрицы A равно числу столбцов матрицы B, и 2) соответственные элементы этих матриц равны между собой, причем под соответственными элементами понимаются элементы с одними и теми же индексами.

Таким образом, если матрица

$$
A = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{bmatrix},
$$

а матрица

$$
B = \begin{bmatrix}
b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\
b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn}
\end{bmatrix}
$$

и $a_{ij} = b_{ij}$ ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$), то $A = B$.

2. Линейное преобразование. Пусть n величин $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ связаны с m величинами $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$ такими зависимостями:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array}\right\}. \tag{4,15}$$

По этим формулам величины $y_1, y_2, \ldots, y_m$ выражаются *линейно* и *однородно* через n других величин $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Преобразование величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при помощи формул (4,15) в величины $y_1, y_2, \ldots, y_m$ называется линейным преобразованием. Формулы (4,15) сокращенно можно записать так:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, m). \tag{4,16}$$

Коэффициенты линейного преобразования (4,15) величин x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) в величины y_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) могут быть записаны в виде матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

которая называется матрицей линейного преобразования (4,15) величин x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) в величины y_i ($i = 1, 2, \ldots, m$).

Правила алгебраических преобразований над матрицами становятся наиболее понятными, если пользоваться введенным понятием линейного преобразования одних величин в другие.

3. Сложение и вычитание матриц. Пусть имеется линейное преобразование

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array}\right\} \tag{4,17}$$

величин x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) в величины y_i ($i = 1, 2, \ldots, m$).

Матрица этого преобразования

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{4,18}$$

Пусть имеется другое линейное преобразование величин x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) в величины z_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) по формулам

$$\begin{aligned} z_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n; \\ z_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n; \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_m &= b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \cdots + b_{mn}x_n. \end{aligned} \qquad (4,19)$$

Матрица этого преобразования

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{2n} & b_{2n} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (4,20)$$

Составим теперь линейное преобразование величин x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) в величины u_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), являющиеся суммой величин y_i и z_i. Для этого сложим линейные преобразования (4,17) и (4,19) и получим

$$\begin{aligned} u_1 &= y_1 + z_1 = (a_{11} + b_{11})x_1 + (a_{12} + b_{12})x_2 + \cdots + (a_{1n} + b_{1n})x_n; \\ u_2 &= y_2 + z_2 = (a_{21} + b_{21})x_1 + (a_{22} + b_{22})x_2 + \cdots + (a_{2n} + a_{2n})x_n; \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m &= y_m + z_m = (a_{m1} + b_{m1})x_1 + (a_{m2} + b_{m2})x_2 + \cdots + (a_{mn} + b_{mn})x_n. \end{aligned} \qquad (4,21)$$

Линейное преобразование (4,21) представляет собой сумму линейных преобразований (4,17) и (4,19).

Матрицу этого преобразования

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \ldots & a_{2n} + b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \qquad (4,22)$$

и следует рассматривать как сумму матриц линейных преобразований (4,17) и (4,19), т. е. как сумму матриц (4,18) и (4,19), т. е. как $A + B$. Таким образом,

$$A + B = C. \qquad (4,23)$$

Итак, *суммой двух прямоугольных матриц A и B равных размеров ($m \times n$) называется матрица C того же размера, элементы которой c_{ij} равны сумме* соответствующих элементов матриц A и B.

$$A + B = C,$$

если

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij} \tag{4,24}$$

$(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$, т. е.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \ldots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} \end{bmatrix}. \tag{4,25}$$

Сумму следует понимать в алгебраическом смысле. Это значит, что разность $A - B$ матриц A и B одного и того же порядка есть матрица D того же порядка, элементы которой равны разности соответствующих элементов матриц A и B, т. е.

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}.$$

Понятие суммы матриц распространяется на любое число матриц. Сумма матриц подчиняется таким законам:

а) переместительному

$$A + B = B + A;$$

б) сочетательному

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Пример.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2+1 & 3+(-3) & 5+4 & 7+0 \\ 1+2 & 4+1 & 2+3 & 3+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Умножение матрицы на число. Если умножить обе части каждой из формул линейного преобразования (4,17) на число α, то получим

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \alpha y_1 = a_{11}\alpha x_1 + a_{12}\alpha x_2 + \cdots + a_{1n}\alpha x_n \\ v_2 = \alpha y_2 = a_{21}\alpha x_1 + a_{22}\alpha x_2 + \cdots + a_{2n}\alpha x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_m = \alpha y_m = a_{m1}\alpha x_1 + a_{m2}\alpha x_2 + \cdots + a_{mn}\alpha x_n \end{array}\right\}. \qquad (4,26)$$

Формулы (4,26) определяют линейное преобразование величин x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ в величины v_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Матрица коэффициентов этого преобразования

$$\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \ldots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \ldots & \alpha a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \ldots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad (4,27)$$

естественно, может рассматриваться как произведение матрицы A преобразования (4,17) на число α.

Таким образом, возникает правило умножения матрицы на число: *чтобы умножить матрицу A на число α, надо на это число умножить каждый элемент матрицы A.*

Пример.

$$5 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 20 & 25 \\ 5 & 10 & -15 & 0 \\ 10 & 5 & 5 & 15 \end{bmatrix}.$$

Имеют место следующие равенства:

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A \\ \alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B \end{array}\right\}. \qquad (4,28)$$

5. Умножение матриц. Возьмем линейное преобразование величин x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ в величины y_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, определяемое формулами

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array}\right\} \qquad (4,29)$$

с матрицей преобразования

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (4,30)$$

Рассмотрим еще одно линейное преобразование, которое преобразует величины $y_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ в величины $z_r (r = 1, 2, \ldots, s)$ по формулам

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1m}y_m \\ z_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2m}y_m \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_s &= b_{s1}y_1 + b_{s2}y_2 + \cdots + b_{sm}y_m \end{aligned}\right\} \qquad (4{,}31)$$

с матрицей преобразования

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{s1} & b_{s2} & \ldots & b_{sm} \end{bmatrix}. \qquad (4{,}32)$$

Отметим уже в этом месте, что число строк в матрице A первого линейного преобразования равно числу столбцов в матрице B второго преобразования.

Поставим перед собой задачу выразить величины z_r $(r = 1, 2, \ldots, s)$ через величины $x_j (j = 1, 2, \ldots, n)$. Для этого заменим в формулах (4,31) величины $y_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ их значениями из формул (4,29):

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= b_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + b_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \\ &+ \cdots + a_{2n}x_n) + \cdots + b_{1m}(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n) \\ z_2 &= b_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + b_{22}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \\ &+ \cdots + a_{2n}x_n) + \cdots + b_{2m}(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_s &= b_{s1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + b_{s2}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \\ &+ \cdots + a_{2n}x_n) + \cdots + b_{sm}(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n) \end{aligned}\right\}.$$

Каждую из этих формул преобразуем, собирая члены с общими множителями x_j и вынося эти множители за скобки:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1m}a_{m1})x_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + \cdots + \\ &+ b_{1m}a_{m2})x_2 + \cdots + (b_{11}a_{1n} + b_{12}a_{2n} + \cdots + b_{1m}a_{mn})x_n \\ z_2 &= (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + \cdots + b_{2m}a_{m1})x_1 + (b_{21}a_{12} + \\ &+ b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2m}a_{m2})x_2 + \cdots + (b_{21}a_{1n} + b_{22}a_{2n} + \\ &+ \cdots + b_{2m}a_{mn})x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_s &= (b_{s1}a_{11} + b_{s2}a_{21} + \cdots + b_{sm}a_{m1})x_1 + (b_{s1}a_{12} + b_{s2}a_{22} + \\ &+ \cdots + b_{sm}a_{m2})x_2 + \cdots + (b_{s1}a_{1n} + b_{s2}a_{2n} + \\ &+ \cdots + b_{sm}a_{mn})x_n. \end{aligned}\right\}.$$

Мы получили формулы линейного преобразования величин $x_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ в величины $z_r (r = 1, 2, \ldots, s)$, минуя промежуточное преобразование (4,31). Матрица этого окончательного линейного преобразования

$$C = \begin{bmatrix} (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1m}a_{m1}) \ldots (b_{11}a_{1n} + \\ + b_{12}a_{2n} + \cdots + b_{1m}a_{mn}) \\ (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + \cdots + b_{2m}a_{m1}) \ldots (b_{21}a_{1n} + \\ + b_{22}a_{2n} + \cdots + b_{2m}a_{mn}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (b_{s1}a_{11} + b_{s2}a_{21} + \cdots + b_{sm}a_{m1}) \ldots (b_{s1}a_{1n} + \\ + b_{s2}a_{2n} + \cdots + b_{sm}a_{mn}) \end{bmatrix}. \quad (4,33)$$

Матрица C называется произведением матрицы B на матрицу A. $C = BA$.

Размер ее равен $s \times n$.

$$C = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{s1} & b_{s2} & \ldots & b_{sm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Элемент c_{ij} матрицы C, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы B на соответствующие элементы j-го столбца матрицы A, т. е.

$$c_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{im}a_{mj} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}. \quad (4,34)$$

Например,

$$c_{23} = b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + \cdots + b_{2m}a_{m3}.$$

Формула (4,33) и определяет произведение матрицы B на матрицу A.

Свойства произведения двух матриц. а) Не всякие две матрицы можно перемножить. *Произведение BA двух матриц в указанном порядке возможно в том и только в том случае, если число столбцов матрицы B равно числу строк матрицы A. Если размер матрицы B равен $s \times m$, а размер матрицы A равен $m \times n$, то матрица BA имеет размер $s \times n$.* Символически это можно записать так:

$$(s \times m) \cdot (m \times n) = s \times n. \quad (4,35)$$

Значит, в матрице, являющейся произведением двух матриц, число строк равно числу строк левого сомножителя, а число столбцов — числу столбцов правого сомножителя.

б) *Произведение двух матриц в общем случае не обладает свойством переместительности* (иначе говорят, что оно не обладает свойством коммутативности), т. е.

$$BA \neq AB.$$

Значит, в общем случае менять местами матрицы-сомножители нельзя, не изменив их произведения. В этом состоит одно из отличий законов алгебры матриц от законов элементарной алгебры.

Если изменить порядок сомножителей, может оказаться, что вообще умножить матрицы невозможно.

В произведении BA двух матриц B и A мы будем говорить, что матрица A умножается слева на матрицу B, или что матрица B умножается справа на матрицу A.

Если размер матрицы A равен $(p \times n)$, а матрицы B — $(n \times p)$, то можно составить как произведение AB, так и произведение BA. При этом размер матрицы AB равен $(p \times p)$, а матрицы BA — $(n \times n)$.

Укажем, что для двух квадратных матриц одного и того же порядка это условие выполняется, но подчеркнем, что и в этом случае, как правило, $BA \neq AB$.

Две матрицы A и B называются *перестановочными* (иначе коммутативными), если имеет место равенство $BA = AB$. Примером перестановочных матриц являются квадратная и единичная матрицы одного и того же порядка.

Ниже дано большое число упражнений на произведение матриц. Здесь же для иллюстрации сделанного вывода выполним подробно только один пример умножения двух матриц и покажем, как применяется формула (4,34) образования элемента матрицы-произведения.

Пример.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{matrix} 5\cdot1+3\cdot2+(-2)\cdot4 & 5\cdot2+3\cdot1+(-2)\cdot2 \\ 1\cdot1+(-1)\cdot2+0\cdot4 & 1\cdot2+(-1)\cdot1+0\cdot2 \\ 2\cdot1+1\cdot2+3\cdot4 & 2\cdot2+1\cdot1+3\cdot2 \\ 4\cdot1+(-2)\cdot2+2\cdot4 & 4\cdot2+(-2)\cdot1+2\cdot2 \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} 5\cdot3+3\cdot3+(-2)\cdot3 & 5\cdot5+3\cdot(-2)+(-2)\cdot(-4) \\ 1\cdot3+(-1)\cdot3+0\cdot3 & 1\cdot5+(-1)\cdot(-2)+0\cdot(-4) \\ 2\cdot3+1\cdot3+3\cdot3 & 2\cdot5+1\cdot(-2)+3\cdot(-4) \\ 4\cdot3+(-2)\cdot3+2\cdot3 & 4\cdot5+(-2)\cdot(-2)+2\cdot(-4) \end{matrix}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 9 & 15 & 27 \\ -1 & 1 & 0 & 7 \\ 16 & 11 & 18 & -4 \\ 8 & 10 & 12 & 16 \end{bmatrix}.$$

Здесь умножение было возможно, так как число столбцов в первом сомножителе равно числу строк во втором. Первый сомножитель был размером 4×3, второй 3×4, а матрица-произведение имеет размер 4×4, как это следует из (4,35).

6. Произведение нескольких матриц. Если перемножить две матрицы A и B, то мы получим в общем случае матрицу $C = AB$, которую можно умножить, если умножение допустимо, на матрицу D, т. е. составить произведение трех матриц ABD.

Произведение трех матриц ABD следует понимать так: матрица A умножается справа на матрицу B, а полученная матрица умножается справа на матрицу D. Количество перемножаемых матриц может быть любым, лишь бы можно было перемножить каждые две рядом стоящие матрицы.

7. Законы умножения матриц.

а) Если можно перемножить матрицы A и B и произведение AB этих матриц можно умножить на матрицу C, то допустимо составить и произведения $(AB)C$ и $A(BC)$. В таком случае получается равенство, выражающее ассоциативный (сочетательный) закон произведения матриц.

$$A(BC) = (AB)C. \qquad (4,36)$$

Имеют место также:

б) сочетательный закон относительно скалярного сомножителя

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B) \qquad (4,37)$$

и два дистрибутивных закона:

$$\text{в) } (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C; \qquad (4,38)$$

$$\text{г) } C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B. \qquad (4,39)$$

8. Возведение матрицы в степень. Если A — квадратная матрица, а n — целое положительное число, то

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot A \ \dots \ A}_{n \text{ множителей}}.$$

Матрица A^n называется n-ой степенью матрицы A. При этом

$$A^2 = A \cdot A;$$
$$A^3 = A \cdot A^2 = A^2 \cdot A;$$
$$A^4 = A \cdot A^3 = A^2 \cdot A^2 = A^3 \cdot A$$

и т. д.

Матрица A^2 называется квадратом матрицы A, а матрица A^3 — ее кубом.

Теперь приступим к решению задач.

Задача 4,1. Произведите указанные действия над векторами-столбцами:

$$U = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad V = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad W = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1) $3U$; 2) $-V$; 3) $U+4V$; 4) $U+V+W$; 5) $U-V+W$; 6) $3U-2V+4W$; 7) $2U-V+3W$.

Решение.

1) На основании формулы (4,27)

$$3U=3\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\3\\6\end{bmatrix}.$$

2) По формуле (4,27)

$$-V=-1\begin{bmatrix}-5\\6\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-6\\0\end{bmatrix}.$$

3) Матрица

$$A=U+4V=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}-5\\6\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-20\\24\\0\end{bmatrix}$$

По формуле (4,25), согласно которой для сложения двух матриц равных размеров надо сложить их соответствующие элементы, получаем

$$A=\begin{bmatrix}-17\\25\\2\end{bmatrix}.$$

4) Пользуясь формулой (4,25) для сложения двух матриц, а также сочетательным законом сложения, находим

$$U+V+W=(U+V)+W=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5\\6\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-2\\7\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\8\\3\end{bmatrix}.$$

5) Применяя сочетательный закон сложения матриц и правила вычитания и сложения матриц, получаем

$$U-V+W=(U-V)+W=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-5\\+6\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}8\\-5\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\-4\\3\end{bmatrix}.$$

6) На основании правила умножения матрицы на число, правила сложения и вычитания матриц и сочетательного закона для сложения имеем

$$3U-2V+4W=3\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-5\\6\\0\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}9\\3\\6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-10\\12\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\4\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9-(-10)+4\\3-\quad 12+4\\6-\quad 0+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23\\-5\\10\end{bmatrix}.$$

$$7)\ 2U-V+3W=2\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-5\\6\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}6\\2\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-5\\6\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6+5+3\\2-6+3\\4-0+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\-1\\7\end{bmatrix}.$$

Задача 4,2 (для самостоятельного решения). Произведите указанные действия над матрицами-столбцами

$$U=\begin{bmatrix}1\\4\\3\\2\end{bmatrix};\quad V=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\2\end{bmatrix};\quad W=\begin{bmatrix}1\\4\\-2\\-1\end{bmatrix};\quad T=\begin{bmatrix}-1\\-2\\-3\\4\end{bmatrix}.$$

1) $U+V+W-T$; 2) $U-V+W-T$; 3) $U+V+W+T$; 4) $2U-3V+4W+T$; 5) $3U+2V+4W-5T$.

Ответ.

$$1)\begin{bmatrix}3\\10\\5\\-1\end{bmatrix};\quad 2)\begin{bmatrix}3\\10\\3\\-5\end{bmatrix};\quad 3)\begin{bmatrix}1\\6\\-1\\7\end{bmatrix};\quad 4)\begin{bmatrix}5\\22\\-8\\-2\end{bmatrix};\quad 5)\begin{bmatrix}12\\38\\18\\-18\end{bmatrix}.$$

Задача 4,3. Над векторами-строками $U=[2,\ -1,\ 2]$; $V=[-1,\ 0,\ 5]$; $W=[1,\ 4,\ 3]$ провести указанные действия: 1) $2U$; 2) $-3V$; 3) $U+V-W$; 4) $2U+V-3W$; 5) $U+2V+3W$.

Решение.

1) Пользуясь формулой (4,27) умножения матриц на число, имеем

$$2U=2[2,\ -1,\ 2]=[4,\ -2,\ 4].$$

2) На основании той же формулы

$$-3V=-3[-1,\ 0,\ 5]=[3,\ 0,\ -15].$$

3) Пользуясь формулой (4,25) сложения матриц и свойством сочетательности сложения, получаем

$$U+V-W=[2,\ -1,\ 2]+[-1,\ 0,\ 5]-[1,\ 4,\ 3]=$$
$$=[2+(-1)-1,\ -1+0-4,\ 2+5-3]=[0,\ -5,\ 4].$$

4) $$2U+V-W=2[2,\ -1,\ 2]+[-1,\ 0,\ 5]-[1,\ 4,\ 3]=$$
$$=[4,\ -2,\ 4]+[-1,\ 0,\ 5]-[1,\ 4,\ 3]=$$
$$=[4+(-1)-1,\ -2+0-4,\ 4+5-3]=[2,\ -6,\ 6].$$

5) $$U+2V+3W=[2,\ -1,\ 2]+2[-1,\ 0,\ 5]+3[1,\ 4,\ 3]=$$
$$=[2,\ -1,\ -2]+[-2,\ 0,\ 10]+[3,\ 12,\ 9]=$$
$$=[2+(-2)+3,\ -1+0+12,\ -2+10+9]=[3,\ 11,\ 17].$$

Задача 4,4 (для самостоятельного решения). Докажите, что сумма вектора-столбца

$$U=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

с нулевым вектором-столбцом

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

того же размера равна U, т. е. что

$$U+0=U. \qquad (4,40)$$

Докажите также, что равенство (4,40) остается верным для случая, когда U — вектор-строка, а 0 — нулевой вектор-строка того же размера, что и U.

Задача 4,5 (для самостоятельного решения). Докажите, что нулевой вектор-столбец или нулевой вектор-строка не изменяется от умножения его на любое число.

Задача 4,6 (для самостоятельного решения). Докажите, что если U и V — два вектора (оба векторы-столбцы или оба векторы-строки) с одинаковым числом компонент, то

$$U+0V=U;$$
$$0U+V=V.$$

Задача 4,7. Какое соотношение связывает компоненты векторов U и V, если имеет место равенство

$$3U-2V=0?$$

Решение. Под 0 следует понимать нулевой вектор тех же размеров, что и векторы U и V, размеры которых равны между собой. Элементами вектора $3U-2V$ являются числа $3U_i-2V_i$. Две матрицы равны, если равны их размеры и соответствующие элементы (стр. 94).

Значит, должно выполняться равенство

$$3U_i-2V_i=0,$$

а отсюда следует, что между компонентами матриц существует зависимость

$$U_i=\frac{2V_i}{3}.$$

Задача 4,8 (для самостоятельного решения). Если векторы U, V и 0 имеют один и тот же размер, то какое соотношение связывает компоненты векторов U и V при наличии следующих равенств:

1) $2U+V-5U+4V=0$;
2) $10V-3U+3V+4U=0$;
3) $U+V-2U-2V=0$.

Ответ. 1) $U_i=\frac{5V_i}{3}$; 2) $U_i=-13V_i$; 3) $U_i=-V_i$.

Задача 4,9. Найти указанные суммы, а в случаях, когда это невозможно сделать, объясните причину:

$$1)\ \begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix};\quad 2)\ [5,\ 7,\ -4]+0\cdot[5,\ 4,\ 2];$$

$$3)\ [7,\ 8,\ -1]+7-4+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};\quad 4)\ 2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}2\\4\\-2\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}7\\2\\1\end{bmatrix}.$$

Задача 4,10. Найдите a_1, a_2 и a_3, если

$$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\8\\-3\end{bmatrix}.$$

Решение. Складывая первую и вторую матрицы в левой части равенства и приравнивая сумму правой части, получаем

$$\begin{bmatrix}a_1+2\\a_2+3\\a_3-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\8\\-3\end{bmatrix}.$$

Используем теперь определение равенства двух матриц:

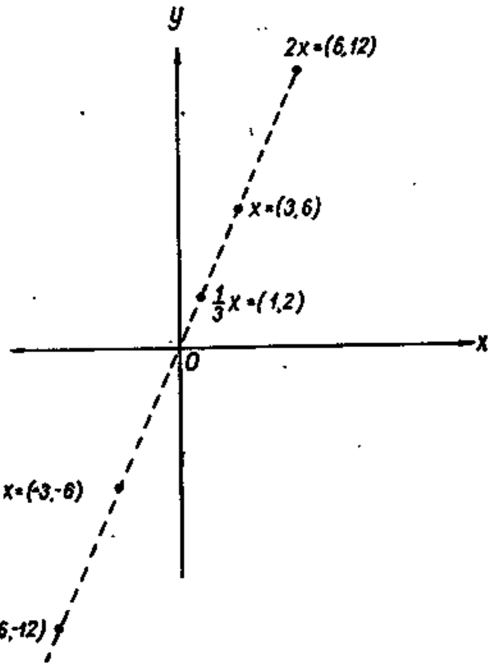
$$a_1 + 2 = 7;\ a_2 + 3 = 8;\ a_3 - 1 = -3,$$

откуда

$$a_1 = 5;\ a_2 = 5;\ a_3 = -2.$$

Задача 4,11 (для самостоятельного решения). Найдите компоненты b_1, b_2 и b_3 вектора-столбца b, если

$$5\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$



Фиг. 4,1

Ответ. $b_1 = \frac{3}{5}$; $b_2 = 0$; $b_3 = -\frac{4}{5}$.

Задача 4,12 (для самостоятельного решения). Чему равны компоненты w_1; w_2; w_3 вектора-столбца w, если

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

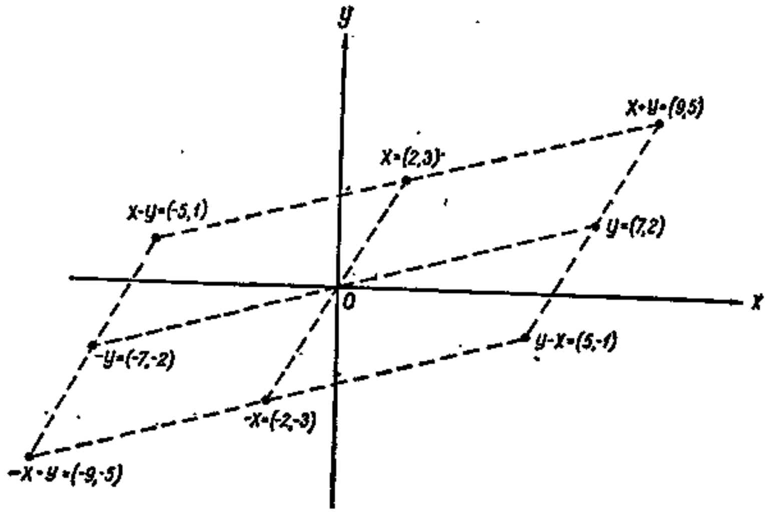
Ответ. $w_1 = w_2 = w_3 = 0.$

Задача 4,13 (для самостоятельного решения). Что можно сказать о компонентах a_1; a_2; a_3 и a_4 вектора a, если

$$0 \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ответ. a_1, a_2, a_3 и a_4 — любые числа.

Умножению вектора на число можно дать геометрическую интерпретацию. Рассмотрим прямоугольную систему координат



Фиг. 4,2

на плоскости. Двумерный вектор-строку $[a, b]$ можно рассматривать как точку этой плоскости, абсцисса которой — a, а ордината b. Точки, определяемые произведением числа C на вектор $[a, b]$, т. е. точки $C \cdot [a, b]$ лежат на одной прямой, проходящей через начало координат и точку $[a, b]$. На фиг. 4,1 показаны точки, соответствующие вектору $x = [3, 6]$ и векторам $2x$, $-x$, $-2x$, $\frac{1}{3}x$.

Сумме и разности векторов-строк можно также дать геометрическое истолкование. Если $x = [a, b]$, $y = [c, d]$. Составим векторы $x + y$, $x - y$, $y - x$ и $-x - y$. Эти векторы будут точками, показанными на фиг. 4,2, для случая, когда $x = [2, 3]$ и $y = [7, 2]$.

Задача 4,14. Построить точки, соответствующие векторам $x = [2, 3]$ и $y = [-3, 8]$.

Найти и построить точки, отвечающие векторам: 1) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y$; 2) $x+y$; 3) $2x-3y$; 4) $3x+2y$; 5) $y-2x$.

Задача 4,15. Сложить матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -7 \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение. По формуле (4,25) для матриц получаем

$$A+B=\begin{bmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 4 & 9 & 9 \\ -4 & 7 & -3 \\ 1 & 6 & -5 \end{bmatrix}.$$

Задача 4,16. Вычислить матрицу

$$A=2\cdot\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}-3\cdot\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение. Используя формулу (4,27) для умножения матрицы на число и формулу (4,25) вычитания матриц находим последовательно

$$A=\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 6 & 14 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -12 & 15 \\ 3 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 22 & -11 \\ 3 & 11 \\ -14 & 10 \end{bmatrix}.$$

Задача 4,17 (для самостоятельного решения). Выполнить действия

$$6\cdot\begin{bmatrix} -7 & 2 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}-3\cdot\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ответ.

$$\begin{bmatrix} -48 & 0 & 15 & 33 \\ -33 & 6 & 9 & 27 \end{bmatrix}.$$

Задача 4,18. Матрицу

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

представить в виде произведения числа на единичную матрицу.

Решение.

$$A=5\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=5E_3.$$

Задача 4,19. Сложить матрицы

$$A=\begin{bmatrix}7&0&4\\0&7&2\\-5&2&11\end{bmatrix}\ \text{и}\ B=\begin{bmatrix}2&0&3\\0&2&-1\\4&5&-7\end{bmatrix}.$$

Решение. Матрица A может быть записана в виде блочной матрицы

$$A=\left[\begin{array}{cc|c}7&0&4\\0&7&2\\\hline -5&2&11\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|c}\multicolumn{2}{c|}{7E_2}&4\\&&2\\\hline 5&2&11\end{array}\right];$$

$$B=\left[\begin{array}{cc|c}2&0&3\\0&2&-1\\\hline 4&5&-7\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|c}\multicolumn{2}{c|}{2E_2}&3\\&&-1\\\hline 4&5&-7\end{array}\right].$$

Так как матрицы

$$\begin{bmatrix}7&0\\0&7\end{bmatrix}=7\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=7E_2;\quad \begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=2\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=2E_2,$$

то сумма

$$A+B=\left[\begin{array}{cc|c}\multicolumn{2}{c|}{7E_2}&4\\&&2\\\hline -5&2&11\end{array}\right]+\left[\begin{array}{cc|c}\multicolumn{2}{c|}{2\ E_2}&3\\&&-1\\\hline 4&5&-7\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|c}\multicolumn{2}{c|}{9\ E_2}&7\\&&1\\\hline -1&7&4\end{array}\right]=$$

$$=\begin{bmatrix}9&0&7\\0&9&1\\-1&7&4\end{bmatrix}.$$

Содержание. Умножения матриц. Формулы для проверки Умножение матриц. Обратная матрица и способы ее получения.

А. ЗАДАЧИ НА ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Задача 5,1. Найти произведение вектора-строки

$$A = [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$$

на вектор-столбец

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Прежде чем умножать матрицы, надо убедиться, что такое умножение имеет смысл.

Решение. В данном случае получить произведение возможно, так как размер матрицы A равен $1 \times n$, а матрицы B — $n \times 1$, т. е. число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B (формула (4,35), стр. 100). В произведении будем иметь матрицу размером $(1 \times n) \cdot (n \times 1) = 1 \times 1$, т. е. некоторое число.

Действительно, на основании формулы (4,34)

$$[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n.$$

Сумма этих произведений есть число. Еще раз подчеркнем, что *произведение вектора-строки (первый сомножитель) на вектор-столбец (второй сомножитель) есть число* (можно сказать, что такое произведение является скаляром).

Задача 5,2. Найти произведение векторов

$$A = [2, 4, 5, 7] \text{ и } B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Решение. $AB = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 5 \cdot (-1) + 7 \cdot 4 =$
$= 4 - 12 - 5 + 28 = 15.$

Задача 5,3. Если a — вектор-строка, b — вектор-столбец с одним и тем же числом элементов, а α — число, то доказать, что

$$\alpha (a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b).$$

Доказательство. 1) Пусть

$$a = [a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n];\ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Тогда по формуле умножения матриц

$$a \cdot b = [a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} =$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots + a_n b_n;$$

$$\alpha (a \cdot b) = \alpha a_1 b_1 + \alpha a_2 b_2 + \alpha a_3 b_3 + \ldots + \alpha a_n b_n) \qquad (A)$$

2) $\alpha a = \alpha [a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n] = [\alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \alpha a_3,\ \ldots,\ \alpha a_n]$

по формуле (4,25) умножения матриц (см. также предыдущую задачу)

$$(\alpha a) \cdot b = [\alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \alpha a_3,\ \ldots,\ \alpha a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} =$$

$$\alpha a_1 b_1 + \alpha a_2 b_2 + \alpha a_3 b_3 + \ldots + \alpha a_n b_n). \qquad (B)$$

Сравнивая выражения (A) и (B), приходим к выводу, что

$$\alpha (a \cdot b) = (\alpha \cdot a)\, b.$$

Самостоятельно докажите, что каждое из этих выражений равно $a \cdot (\alpha b)$.

Задача 5,4 (для самостоятельного решения). Доказать, что если a — трехмерный вектор-строка, b и c — трехмерные векторы-столбцы и α — некоторое число, то имеют место равенства

$$a \cdot (\alpha b) = \alpha (a \cdot b);$$
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Задача 5,5. Пусть $A = [x, y]$ и векторы-столбцы a и b равны соответственно

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Определить x, и y, если известно, что $A \cdot a = x$, а $A \cdot B = y$.

Решение. По условию $A \cdot a = x$, а $A \cdot b = y$, т. е.

$$[x, y] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = x; \quad [x, y] \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = y.$$

Отсюда для определения x и y получится система уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3x + 5y &= x; \\ 6x + 8y &= y \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} 2x + 5y &= 0; \\ 6x + 7y &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Так как определитель этой системы

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 30 = -16 \neq 0,$$

то она допускает только нулевое решение: $x = y = 0$.

Задача 5,6 (для самостоятельного решения). Пусть $x = [x_1, x_2]$, а векторы a и b равны соответственно

$$a = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Определить x_1 и x_2, если $x \cdot a = 4$; $x \cdot b = -1$.

Ответ: $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = \frac{1}{3}$.

Задача 5,7. Найти произведение $a \cdot b$, если

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}; \quad b = [2, 3, -1].$$

Решение. По формуле (4, 33) получаем

$$a \cdot b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot [2, 3, -1] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 & 1 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) \\ -5 \cdot 2 & -5 \cdot 3 & -5 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 6 & 9 & -3 \\ -10 & -15 & 5 \end{bmatrix}.$$

Обратим внимание на то, что произведение вектора-столбца *справа* на вектор-строку представляет собой матрицу, а не число, как в том случае, когда вектор-столбец умножался *слева* на вектор-строку.

Размер полученной матрицы определяется по известной формуле (4,35), которая в нашем случае запишется так:

$$(4 \times 1) \cdot (1 \times 3) = (4 \times 3).$$

Действительно, получилась матрица с четырьмя строками и тремя столбцами. Таким образом, произведение вектора-столбца справа на вектор-строку есть матрица, у которой элементы любой ее строки (столбца) пропорциональны соответствующим элементам другой ее строки (столбца).

Задача 5,8 (для самостоятельного решения). Найти произведения

$$1)\ \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot [1,\ 2,\ -2,\ 3,\ 4]; \quad 2)\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot [4,\ 5].$$

Ответ.

$$1)\ \begin{bmatrix} 5 & 10 & -10 & 15 & 20 \\ 7 & 14 & -14 & 21 & 28 \\ -3 & -6 & 6 & -9 & -12 \\ 2 & 4 & -4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad 2)\ \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ -12 & -15 \end{bmatrix}.$$

8. ЗАДАЧИ НА ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ И МАТРИЦ

Задача 5,9. Найти произведение AB вектора $A = [5,\ 7,\ -2]$ на матрицу

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Убедимся прежде всего в том, что умножение имеет смысл: число столбцов матрицы A равно трем, а в матрице B столько же строк. Поэтому произвести умножение можно:

$$AB = [5,\ 7,\ -2] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= [5 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2);\ 5 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + (-2) \cdot 3;$$

$5 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1)] = [21,\ 37,\ 21]$. Получился вектор-строка с тремя элементами, как и должно быть по правилу (4,35):

$$(1 \times 3) \cdot (3 \times 3) = (1 \times 3).$$

Задача 5,10 (для самостоятельного решения). Найти произведение AB, если

$$A = [1,\ 0,\ -1];\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ответ. $(1,\ -7)$.

Задача 5,11. Найти произведение AB, если

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Умножение возможно, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

По правилу (4,34) умножения матриц получаем

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + (-4) \cdot (-1) \\ 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Размер этой матрицы (2×1), как и должно быть по правилу (4,35):

$$(2 \times 3) \cdot (3 \times 1) = (2 \times 1).$$

Задача 5,12. (для самостоятельного решения). Найти произведение AB матриц A и B, если

1) $$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 & 4 \\ 7 & 2 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & -7 & -1 \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix};$$

2) $$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix};$$

3) $$A = [5,\ \ 7,\ \ -2,\ \ -3];\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & -4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ответ. 1) $\begin{bmatrix} -9 \\ 20 \\ -18 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 23 \\ 14 \\ 15 \\ 17 \end{bmatrix}$; 3) $[0, 21]$.

Задача 5,13. Подрядчик-строитель заключил договор на возведение таких строений: 3 жилых домов, 5 детских садов и 9 домов отдыха. Материалами для строительства являются сталь, лес, стекло, краска. Количество сырья, а также рабочей силы на каждый вид строения выражено в некоторых условных единицах и дается такой матрицей

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{ccccc}\text{Сталь} & \text{Лес} & \text{Стекло} & \text{Краска} & \text{Рабочая сила}\end{array} \\ \begin{array}{l}\text{Жилой дом} \\ \text{Детский сад} \\ \text{Дом отдыха}\end{array} & A = \begin{bmatrix} 10 & 17 & 8 & 5 & 11 \\ 7 & 12 & 4 & 3 & 8 \\ 5 & 15 & 10 & 4 & 9 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Единица стали стоит 12 рублей, единица леса — 7 рублей, единица стекла — 5 рублей, единица краски — 4 рубля, единица рабочей силы — 10 рублей.

Определить: 1) общее количество потребных материалов и рабочей силы; 2) стоимость материалов и рабочей силы для каждого вида строений; 3) общую стоимость материалов и рабочей силы. (Все цифры, входящие в задачу, условны и не соответствуют действительным данным).

Решение. Договор, заключенный подрядчиком на возведение строений, представим вектором-строкой $B = [3, 5, 9]$. Чтобы узнать количество необходимых материалов, надо перемножить матрицы B и A и найти произведение BA в указанном порядке, т. е. матрицу B умножить справа на матрицу A. Это произведение имеет смысл, так как в матрице B три столбца, а в матрице A столько же строк. В результате получится матрица, размер которой по формуле (4,35) равен (1×5), так как

$$(1 \times 3) \cdot (3 \times 5) = (1 \times 5),$$

т. е. получится вектор-строка с пятью элементами. Итак, общее количество материалов, необходимых на все строения, в очень компактной записи равно

$$BA = [3,5,9] \cdot \begin{bmatrix} 10 & 17 & 8 & 5 & 11 \\ 7 & 12 & 4 & 3 & 8 \\ 5 & 15 & 10 & 4 & 9 \end{bmatrix} =$$

$$= [3 \cdot 10 + 5 \cdot 7 + 9 \cdot 5;\quad 3 \cdot 17 + 5 \cdot 12 + 9 \cdot 15;\quad 3 \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 9 \cdot 10;\quad 3 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 9 \cdot 4;\quad 3 \cdot 11 + 5 \cdot 8 + 9 \cdot 9] = [110,\ 246,\ 134,\ 66,\ 154]$$

(применено правило (4,34) умножения матриц).

Таким образом, подрядчик должен приобрести: стали 110 единиц, леса 246 единиц, стекла 134 единицы, краски 66 единиц и 154 единицы рабочей силы.

Чтобы узнать стоимость материалов и рабочей силы для каждого вида строений, поступим так: расположим цены материалов в вектор-столбец и получим $C = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$. Умножим теперь справа матрицу A на вектор-столбец C по правилу (4,34) умножения матриц и получим вектор-столбец с тремя элементами, так как размер матрицы AC равен

$$(3 \times 5) \cdot (5 \times 1) = (3 \times 1).$$

$$AC = \begin{bmatrix} 10 & 17 & 8 & 5 & 11 \\ 7 & 12 & 4 & 3 & 8 \\ 5 & 15 & 10 & 4 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 10 \cdot 12 + 17 \cdot 7 + 8 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 11 \cdot 10 \\ 7 \cdot 12 + 12 \cdot 7 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 8 \cdot 10 \\ 5 \cdot 12 + 15 \cdot 7 + 10 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 9 \cdot 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 409 \\ 280 \\ 321 \end{bmatrix}.$$

(Умножение этих матриц в другом порядке CA не имеет смысла. Почему?)

Итак, стоимость материалов и рабочей силы для жилого дома — 409 рублей, для детского сада — 280 рублей, для дома отдыха — 321 рубль. Чтобы ответить на третий вопрос задачи, составим произведение матриц

$$BAC = (BA) \cdot C = [110, \ 246, \ 134, \ 66, \ 154] \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} = 5516.$$

Это же число можно получить и иначе:

$$BAC = B \cdot (AC) = [3, \ 5, \ 9] \cdot \begin{bmatrix} 409 \\ 280 \\ 321 \end{bmatrix} = 5516.$$

Итак, общая стоимость всех строений 5516 рублей (условных, конечно).

Задача 5,14 (для самостоятельного решения). Произвести указанные действия:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$; 2) $[2, \ -4] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$;

5) $[2,\ 0,\ -4]\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 5 & -2 & 4 & 7\\ 2 & 1 & 2 & 1 & -3 & 5\\ 0 & 5 & 2 & 4 & 7 & 3\end{bmatrix}$; 6) $[x,\ y]\cdot\begin{bmatrix}u & v\\ w & t\end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$; 8) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$;

9) $[u_1\ \ u_2\ \ u_3]\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Ответ. 1) $\begin{bmatrix}-1\\ 8\end{bmatrix}$; 2) $[-18,\ \ 14]$; 3) $\begin{bmatrix}4\\ 11\\ 3\\ -2\\ -5\\ 3\end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}$; 5) $[2,\ -16,\ 2,\ -20,\ -20,\ 2]$;

6) $[xu+yw,\ \ xv+yt]$; 7) $\begin{bmatrix}au_1+bu_2\\ cu_1+du_2\end{bmatrix}$;

8) $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$; 9) $[u_1\ \ u_2\ \ u_3]$.

Задача 5,15 (для самостоятельного решения). Найти x и y из уравнения

$$[x,\ \ y]\cdot\begin{bmatrix}5 & -3\\ 2 & 4\end{bmatrix}=[5,\ \ 3].$$

Указание. Использовать определение равенства двух матриц (стр. 100).

Ответ. $x=\frac{7}{13}$; $y=\frac{15}{13}$.

Задача 5,16 (для самостоятельного решения). Из произведения

$$[-3,\ \ 2]\cdot\begin{bmatrix}a & c\\ c & a\end{bmatrix}=[3,\ \ -7]$$

найти матрицу

$$\begin{bmatrix}a & c\\ c & a\end{bmatrix}.$$

Указание. Использовать определение равенства матриц.

Ответ. $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}$.

Задача 5,17. Найти вектор a из уравнения

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Решение. Система

$$\left.\begin{aligned} a_1 - a_2 &= 13 \\ -a_1 + a_2 &= -4 \end{aligned}\right\}$$

противоречива. Величины a_1 и a_2 определить невозможно.

Задача 5,18. Найти вектор u из уравнения

$$\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 10 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -14 \end{bmatrix}.$$

Решение. Произведя умножение в левой части равенства, получим

$$\begin{bmatrix} -5u_1 + 3u_2 \\ 10u_1 - 6u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -14 \end{bmatrix},$$

откуда, пользуясь определением равенства двух матриц, находим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} -5u_1 + 3u_2 &= 7 \\ 10u_1 - 6u_2 &= -14 \end{aligned}\right\}.$$

Легко усмотреть, что второе уравнение является следствием первого. Оно получается из первого умножением обеих его частей на -2. Поэтому фактически мы имеем одно уравнение с двумя неизвестными

$$-5u_1 + 3u_2 = 7,$$

откуда

$$5u_1 = 3u_2 - 7.$$

Обозначим u_2 через k. Тогда

$$u_1 = \frac{3}{5}k - \frac{7}{5};$$

$$u_2 = k,$$

а искомый вектор

$$u = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}k - \frac{7}{5} \\ k \end{bmatrix},$$

где k — любое число.

Таким образом, предложенное уравнение имеет бесконечное множество решений.

Задача 5,19. Найти вектор u, если

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 11 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Выполнив в левой части равенства умножение матриц, а в правой умножение числа на матрицу, получим

$$\begin{bmatrix} 2u_1 + 3u_2 \\ 6u_1 + 2u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & u_1 \\ 11 & u_2 \end{bmatrix}.$$

Но если две матрицы равны, то их соответствующие элементы равны, потому получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 2u_1 + 3u_2 = 11u_1 \\ 6u_1 + 9u_2 = 11u_2 \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} -9u_1 + 3u_2 = 0 \\ 6u_1 - 2u_2 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Получилась система из двух линейных однородных уравнений с двумя неизвестными. Так как определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} -9 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

то система допускает решения, отличные от нулевого. Легко усмотреть, что второе уравнение есть следствие первого. Оно получается из первого умножением его на $-\frac{2}{3}$. Таким образом, мы имеем одно уравнение с двумя неизвестными, и решений будет бесконечное множество. Из второго уравнения следует, что

$$u_2 = 3u_1.$$

Если обозначить $u_1 = k$, то $u_2 = 3k$ и вектор

$$u = \begin{bmatrix} k \\ 3k \end{bmatrix},$$

где k — любое число.

Задача 5,20 (для самостоятельного решения). Найти x и y из уравнений:

$$1)\ \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 8 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad 2)\ \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 14 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Ответ. 1) $x = 3k$; $y = 2k$; 2) $x = 4k$; $y = 5k$, где k — любое число.

Задача 5,21. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix};$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix};\quad D=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 5 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Найти: 1) компоненту матрицы AB, стоящую во второй строке и третьем столбце;

2) компоненту, стоящую в третьей строке и втором столбце матрицы BD;

3) компоненту, стоящую в последней строке и последнем столбце матрицы AD;

4) компоненту, стоящую в третьей строке и первом столбце матрицы CD.

Решение. Искомую компоненту будем обозначать во всех четырех случаях через c_{ij}, причем первый индекс i означает номер строки, а второй индекс j — номер столбца, в которых находится эта компонента.

1) Умножим вторую строку матрицы A на третий столбец матрицы B:

$$c_{23}=[-1,\ 2,\ 0,\ -3]\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}=[-1\cdot 1+2\cdot 0+0\cdot 1+(-3)\cdot 2]=$$

$$=-7.$$

2) Умножим третью строку матрицы B на второй столбец матрицы D:

$$c_{32}=[-3,\ 0,\ 1,\ 1]\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}=$$

$$=-3\cdot(-1)+0\cdot 0+1\cdot(-2)+1\cdot(-3)=-2.$$

3) Матрица AD по правилу (4,35) имеет размер

$$(2\times 4)\cdot(4\times 2)=(2\times 2).$$

Поэтому в ней две строки и два столбца. Значит, ее последней строкой является вторая и последним столбцом — второй. Искомая компонента

$$c_{32} = [-1,\ 2,\ 0,\ -3] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} = -1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + $$
$$+ (-3) \cdot (-3) = 10.$$

4) $$c_{31} = [4,\ 1,\ 1,\ 1] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 17.$$

Задача 5,22. В условии предыдущей задачи определить размеры матрицы: 1) AC; 2) DA; 3) AD; 4) BC; 5) CB; 6) DAC; 7) $BCDA$.

Решение. 1) Размер матрицы AC $(2 \times 4) \cdot (4 \times 4) = (2 \times 4)$. Она имеет две строки и четыре столбца.

2) Размер матрицы DA определится из формулы

$$(4 \times 2) \cdot (2 \times 4) = (4 \times 4).$$

Значит, матрица DA — квадратная с четырьмя строками и четырьмя столбцами.

3) Размер матрицы AD $(2 \times 4) \cdot (4 \times 2) = (2 \times 2)$. Это тоже квадратная матрица с двумя строками и двумя столбцами.

4) Размер матрицы BC $(4 \times 4) \cdot (4 \times 4) = (4 \times 4)$.

5) Размер матрицы CB (4×4).

6) Матрицы DAC можно получить в таком порядке: а) DA, б) $(DA)\,C$ или составить сначала произведение AC, а потом умножить его слева на $D : D \cdot (AC)$. Размер DA определен в пункте 2. Он равен (4×4). Если матрицу A размером 4×4 умножить на матрицу C размером 4×4, то получим матрицу DAC размером

$$(4 \times 4) \cdot (4 \times 4) = (4 \times 4).$$

Если же взять $DAC = D \cdot (AC)$, то, зная, что размер AC равен (2×4), и учитывая, что размер D равен (4×2), а также, что матрица AC умножается на матрицу D слева, находим

$$(4 \times 2) \times (2 \times 4) = (4 \times 4).$$

7) Размер произведения четырех матриц $BCDA$ можно определить так, если учесть сочетательное свойство произведения:

а) $BCDA = (BC) \cdot (DA)$;

б) $BCDA = B \cdot (CDA)$;

в) $BCDA = (BCD) \cdot A$.

Для упражнения определим размер матрицы $BCDA$ во всех этих трех случаях:

а) Размер матрицы BC равен (4×4) (см. пункт 4). Размер матрицы DA тоже равен (4×4). Поэтому размер матрицы $BCDA$ равен $(4 \times 4) \cdot (4 \times 4) = (4 \times 4)$.

б) Определим сначала размер матрицы CDA. Матрица $CDA = C \cdot (DA)$. Но размер матрицы C равен (4×4), а размер матрицы DA уже определен в п. 2 и тоже равен (4×4). Поэтому матрица CDA имеет размер $(4 \times 4) \cdot (4 \times 4) = (4 \times 4)$. Умножая эту матрицу слева на матрицу B, размер которой равен (4×4), найдем, что матрица $BCDA$ имеет размер

$$(4 \times 4) \cdot (4 \times 4) = (4 \times 4).$$

Как и следовало ожидать, мы получили тот же результат.

в) Вычисления надо выполнить самостоятельно. Результат, конечно, должен получиться тот же самый. Правило умножения матриц дается формулой (4,34). На первый взгляд, оно может показаться громоздким и сложным. Однако те, кому приходится часто и много работать с матрицами, очень быстро привыкают безошибочно это правило применять и оно представляется им исключительно простым; палец левой руки должен скользить слева направо вдоль строк первой матрицы, а палец правой руки должен при этом скользить по столбцам второй матрицы сверху вниз. Проделав несколько упражнений, правилю умножения матриц можно легко освоить.

Здесь мы приведем три способа проверки правильности проделанного умножения. Эти способы указаны Л. К. Нарадом и мы покажем их на примерах.

I способ проверки. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 6 & -3 & 5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}; \tag{1}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} 27 & 20 \\ 17 & 40 \end{bmatrix}.$$

Для проверки умножения составляем две матрицы-столбца D и F: в первой матрице D элементы равны сумме элементов в соответствующей строке матрицы B

$$D = \begin{bmatrix} 1+2 \\ 3+(-1) \\ 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

а во второй матрице F элементы равны сумме элементов в соответствующей строке матрицы произведения C

$$F = \begin{bmatrix} 27+20 \\ 17+40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 57 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Произведение матрицы A и D должно равняться матрице F ($AD = F$)

$$AD = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 6 & -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 9 \\ 6 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 5 \cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 57 \end{bmatrix} = F. \quad (4)$$

II способ проверки. Составляем две матрицы-строки G и H: в первой матрице G элементами являются суммы элементов в каждом столбце в первом сомножителе (матрица A)

$$G = [7 + 6, \quad 4 - 3, \quad 2 + 5] = [13, \ 1, \ 7], \quad (5)$$

а во второй матрице H элементами являются суммы элементов в каждом столбце матрицы произведения C

$$H = [27 + 17, \quad 20 + 40] = [44, \ 60]. \quad (6)$$

Произведение матриц G и B должно равняться матрице H ($GB = H$).

$$GB = [13, \ 1, \ 7] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = [13 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 7 \cdot 4;$$
$$13 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 7 \cdot 5] = [44, \ 60] = H. \quad (7)$$

III способ проверки. Составляем матрицу-строку G, элементы которой равны сумме элементов в соответствующих столбцах первого сомножителя $G = [13, \ 1, \ 7]$. Составляем матрицу-столбец D так, что ее элементы равны сумме элементов в соответствующих строках второго сомножителя

$$D = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Произведение GD должно быть равно сумме всех элементов матрицы C

$$GD = [13, \ 1, \ 7]. \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} = 13 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 7 \cdot 9 = 104 =$$
$$= 27 + 17 + 20 + 40.$$

Задача 5,23. Перемножить матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & -5 \\ -2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Решение (столбцы I, II отделены пунктирной линией)

$$AB=\left[\begin{array}{l} 2\cdot2+3\cdot1+(-1)\cdot4+2\cdot(-2)+4\cdot(-1)\\ 1\cdot2+0\cdot1+5\cdot4+(-1)\cdot(-2)+2\cdot(-1)\\ 3\cdot2+2\cdot1+0\cdot4+1\cdot(-2)+(-4)\cdot(-1)\\ \hdashline 2\cdot3+3\cdot2+(-1)\cdot(-5)+2\cdot(-3)+2\cdot4\\ 1\cdot3+0\cdot2+5\cdot(-5)+(-1)\cdot(-3)\cdot+4\cdot4\\ 3\cdot3+2\cdot2+0\cdot(-5)+1\cdot(-3)+(-4)\cdot4 \end{array}\right]=$$

$$=\begin{bmatrix} -5 & 27\\ 22 & -11\\ 10 & -6 \end{bmatrix}.$$

Получилась матрица размером 3×2, как и должно быть:

$$(3\times5)\cdot(5\times2)=(3\times2).$$

Правильность выполненного умножения установите первым способом проверки.

Задача 5,24. Найти произведение матриц

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1\\ 4 & 3 & -2\\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\quad\text{и}\quad B=\begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 8 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 4 & -1 & 0 & 4\\ -3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение (столбцы I—IV отделены пунктирными линиями)

$$AB=\left[\begin{array}{l:l} 2\cdot(-2)+3\cdot1+1\cdot(-3) & 2\cdot4+3\cdot2+1\cdot1\\ 4\cdot(-2)+3\cdot1+(-2)\cdot(-3) & 4\cdot4+3\cdot2+(-2)\cdot1\\ 2\cdot(-2)+4\cdot1+1\cdot(-3) & 2\cdot4+4\cdot2+1\cdot1\\ \hdashline 2\cdot5+3\cdot4+1\cdot2 & 2\cdot8+3\cdot(-1)+1\cdot5\\ 4\cdot5+3\cdot4+(-2)\cdot2 & 4\cdot8+3\cdot(-1)+(-2)\cdot5\\ 2\cdot5+4\cdot4+1\cdot2 & 2\cdot8+4\cdot(-1)+1\cdot5\\ \hdashline 2\cdot1+3\cdot0+1\cdot4 & 2\cdot3+3\cdot4+1\cdot3\\ 4\cdot1+3\cdot0+(-2)\cdot4 & 4\cdot3+3\cdot4+(-2)\cdot3\\ 2\cdot1+4\cdot0+1\cdot4 & 2\cdot3+4\cdot4+1\cdot3 \end{array}\right]=$$

$$=\begin{bmatrix} -4 & 15 & 24 & 18 & 6 & 21\\ 1 & 20 & 28 & 19 & -4 & 18\\ -3 & 17 & 28 & 17 & 6 & 25 \end{bmatrix}.$$

Получилась матрица размером 3×6, как и должно быть по правилу (4,35), так как размер матрицы A равен (3×3), матрицы B (3×6), а размер матрицы AB (произведения матриц A и B) равен $(3\times3)\times\times(3\times6)=(3\times6)$.

Правильность умножения самостоятельно установите вторым способом проверки.

Задача 5,25 (для самостоятельного решения). Найти произведение матриц:

1) $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & -4\\ 2 & 2 & 5\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 4 & -2 & 0 & 3\\ -1 & 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$;

2) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}2 & 5 & 7 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 0 & 3 & 7\end{bmatrix}$;

3) $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 0\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & -2 & 4\\ 2 & -3 & 0\end{bmatrix}$;

4) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\\ 7 & 8\\ -4 & -7\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4 & 7\\ 2 & -5 & 2 & -3\end{bmatrix}$.

Правильность умножения проверьте по одному из указанных способов.

Ответ. 1) $\begin{bmatrix}3 & 0 & 13 & -3\\ 5 & 10 & 1 & 6\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}6 & 11 & 14 & 11 & 17\\ 10 & 17 & 21 & 18 & 29\end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix}10 & -19 & 15\\ 4 & -12 & 26\\ 6 & -15 & 19\end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix}3 & -8 & 8 & 1\\ 7 & -19 & 22 & 6\\ 9 & -26 & 44 & 25\\ -10 & 27 & -30 & -7\end{bmatrix}$.

Задача 5,26. Доказать, что произведение AB матриц

$$A=\begin{bmatrix}a & 0\\ b & 0\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ c & d\end{bmatrix}$$

есть нулевая матрица $0=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

Доказательство.

$$AB=\begin{bmatrix}a & 0\\ b & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0.$$

Эта задача показывает, что ***произведение двух матриц может быть нулевой матрицей и тогда, когда ни одна из матриц сомножителей не является нулевой.***

Задача 5,27 (для самостоятельного решения). Доказать, что если

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \text{то}\ AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

и придумайте пример, когда произведение двух квадратных матриц третьего порядка является нулевой матрицей, а ни одна из перемножаемых матриц не является нулевой.

Задача 5,28. Доказать, что произведение двух диагональных матриц одного и того же порядка есть диагональная матрица того же порядка.

Доказательство. Пусть даны диагональные матрицы A и B:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix},$$

что и доказывает требуемое.

Отметим, что произведение двух диагональных матриц одного и того же порядка коммутативно: для этих матриц $AB=BA$.

Задача 5,29. Доказать, что произведение $AE_n=A$, если A — квадратная матрица порядка n, а E_n — единичная матрица того же порядка. Убедиться, что $AE_n=E_nA$, т. е. матрицы A и E — коммутативны, если они одного и того же порядка.

Доказательство. Пусть

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix};\quad E_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

По правилу умножения матриц получаем

$$AE_n=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Этот пример показывает, что *в матричной алгебре единичная матрица играет такую же роль, какую в обычной алгебре играет 1.*

Задача 5,29а (для самостоятельного решения). Убедиться, что матрицы A и B не коммутативны.

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ответ.

$$AB=\begin{bmatrix}20 & 20 & 4\\ 26 & 36 & 22\\ 15 & 26 & -3\end{bmatrix};\quad BA=\begin{bmatrix}24 & 17 & 21\\ 24 & 6 & 30\\ 16 & 23 & 23\end{bmatrix}.$$

Задача 5,30. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & -7\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{bmatrix}.$$

Убедиться, что выполняются следующие алгебраические законы:

1) $(A+B)\,C=AC+BC$;

2) $A\,(B+C)=AB+BC$;

3) $A\,(BC)=(AB)\cdot C$.

Задача 5,31. Проверить ассоциативный закон умножения матриц на примере матриц

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 5\\ -4 & 2 & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 7 & 2\\ 3 & 1 & 4\\ 0 & 5 & 7\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}.$$

Задача 5,32 (для самостоятельного решения). На примере квадратной и диагональной матриц третьего порядка убедиться в справедливости таких утверждений:

1) умножение квадратной матрицы слева на диагональную матрицу сводится к умножению на постоянную величину всех элементов каждой строки этой матрицы;

2) умножение квадратной матрицы справа на диагональную матрицу сводится к умножению на постоянную величину всех элементов каждого столбца этой матрицы.

D. СТЕПЕНИ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Если A — квадратная матрица, то $A^k\cdot A^l=A^{k+l}$; $(A^k)^l=A^{kl}$.

Задача 5,33. Матрица

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}.$$

Найти A^2, A^3, A^4 и A^6.

Решение.

$$A^2=AA=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 6\\ 18 & 19\end{bmatrix};$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}7 & 6\\ 18 & 19\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}32 & 31\\ 93 & 94\end{bmatrix};$$

$$A^4=(A^2)^2=\begin{bmatrix}7 & 6\\ 18 & 19\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7 & 6\\ 18 & 19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}157 & 156\\ 468 & 469\end{bmatrix};$$

$$A^6=(A^3)^2=\begin{bmatrix}32 & 31\\ 93 & 94\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}32 & 31\\ 93 & 94\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3907 & 3906\\ 11718 & 11719\end{bmatrix}.$$

Задача 5,34 (для самостоятельного решения). Матрица

$$A=\begin{bmatrix}1,000 & 0,200\\ 0,200 & 1,000\end{bmatrix}.$$

Найти A^3 и A^5.

Ответ.

$$A^3=\begin{bmatrix}1,120 & 0,608\\ 0,608 & 1,120\end{bmatrix};\quad A^5=\begin{bmatrix}1,408 & 1,080\\ 1,080 & 1,408\end{bmatrix}.$$

Задача 5,35 (для самостоятельного решения). Показать, что все степени матрицы

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

начиная с пятой, не содержат элементов, равных нулю, а степени меньше пятой этим свойством не обладают.

Задача 5,36 (для самостоятельного решения). Доказать, что любая целая степень n единичной матрицы E есть та же единичная матрица, т. е.

$$E^n=E.$$

Е. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА И СПОСОБЫ ЕЕ ПОЛУЧЕНИЯ

Если две матрицы A и B—квадратные одного и того же порядка, а их произведение AB есть единичная матрица

$$AB=E,$$

то матрица B называется матрицей обратной к A и обозначается символом A^{-1}

$$A\cdot A^{-1}=E. \tag{5,1}$$

Следует иметь в виду, что квадратная матрица A и ей обратная A^{-1} коммутативны, т. е. $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$.

Для того, чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы определитель $|A|$ матрицы A не был равен нулю, т. е. матрица A не должна быть особенной (вырожденной).

Формула для вычисления обратной матрицы

Если $\tilde{A}$ — союзная матрица для матрицы A (формула (4,13), стр. 93), то обратная матрица для A

$$A^{-1}=\frac{\tilde{A}}{|A|}, \tag{5,2}$$

т. е., чтобы найти матрицу, обратную матрице A, надо составить для A союзную матрицу $\tilde{A}$, найти определитель $|A|$ матрицы A

и разделить $\tilde{A}$ на $|A|$. Следует иметь в виду, что если порядок матрицы A большой, то получение обратной матрицы по этой формуле требует сложной вычислительной работы. Кроме того, существуют другие способы нахождения обратной матрицы. Мы укажем их после нескольких упражнений на применение формулы (5,2).

Операция определения обратной матрицы A^{-1} имеет исключительно важное значение для решения системы линейных алгебраических уравнений.

Задача 5,37. Доказать, что матрица

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

является обратной для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4\cdot 4 + 0\cdot(-18) + 5\cdot(-3) & 4\cdot 0 + 0\cdot 1 + 5\cdot 0 \\ 0\cdot 4 + 1\cdot(-18) + (-6)\cdot(-3) & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + (-6)\cdot 0 \\ 3\cdot 4 + 0\cdot(-18) + 4\cdot(-3) & 3\cdot 0 + 0\cdot 1 + 4\cdot 0 \end{bmatrix.}$$

$$\begin{matrix} 4\cdot(-5) + 0\cdot 24 + 5\cdot 4 \\ 0\cdot(-5) + 1\cdot 24 + (-6)\cdot 4 \\ 3\cdot(-5) + 0\cdot 24 + 4\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Легко проверить, что и произведение A на A^{-1} в обратном порядке, т. е. $A^{-1} \cdot A$ тоже есть единичная матрица. Действительно,

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Задача 5,38. Найти союзную матрицу для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Решение. Напомним (см. стр. 93), что для составления союзной матрицы $\tilde{A}$ надо найти алгебраические дополнения A_{ij} элементов матрицы A, из этих элементов составить матрицу

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \tag{2}$$

и транспонировать ее, т. е. поменять местами строки и столбцы, сохраняя их порядок. Полученная матрица $\tilde{A}$ и будет союзной для матрицы A

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

В нашем случае

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}=11; \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}=-17;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}=-10;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}=-3; \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}=21;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}=6;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=5; \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}=-11;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}=2$$

составляем матрицу (2)

$$\begin{bmatrix} 11 & -17 & -10 \\ -3 & 21 & 6 \\ 5 & -11 & 2 \end{bmatrix}.$$

Транспонируем ее и получим союзную матрицу

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} 11 & -3 & 5 \\ -17 & 21 & -11 \\ -10 & 6 & 2 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Задача 5,39. Найти матрицу A^{-1}, обратную матрице A предыдущей задачи.

Решение. Чтобы воспользоваться формулой (5,2), надо знать союзную матрицу $\tilde{A}$ для матриц A и определитель матрицы A. В предыдущей задаче союзная матрица $\tilde{A}$ найдена. Это матрица (3). Осталось найти $|A|$. Воспользуемся правилом Сарруса

$$|A|=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}=3\cdot 2\cdot 5+4(-1)\cdot(-2)+1\cdot 1\cdot 3-$$
$$-(-2)\cdot 2\cdot 3-(-1)\cdot 1\cdot 3-4\cdot 1\cdot 5=30+8+3+$$
$$+12+3-20=36.$$

Подставляя значения $\tilde{A}$ и $|A|$ в формулу (5,2), получаем

$$A^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}11 & -3 & 5\\ -17 & 21 & -11\\ -10 & 6 & 2\end{bmatrix}}{36};$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{11}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{36}\\ -\frac{17}{36} & \frac{7}{12} & -\frac{11}{36}\\ -\frac{5}{18} & \frac{1}{6} & \frac{1}{18}\end{bmatrix}.$$

Проверка:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 1 & -2\\ 4 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{11}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{36}\\ -\frac{17}{36} & \frac{7}{12} & -\frac{11}{36}\\ -\frac{5}{18} & \frac{1}{6} & \frac{1}{18}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Задача 5.40 (для самостоятельного решения). Найти обратную матрицу A^{-1} для матрицы

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

и показать, что $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Ответ.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Задача 5,41 (для самостоятельного решения). Найти матрицу A^{-1}, обратную матрице

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix},$$

и проверить, что $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$.

Ответ.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & -3 & 1\end{bmatrix}.$$

Задача 5,42. Матрица

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

Найти для нее обратную матрицу A^{-1} и проверить, что $AA^{-1}=$ $=A^{-1}A=E$.

Указание. Определитель A удобно вычислить по формуле (4,14). Применение этой формулы приведет к вычислению определителя

$$\frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & 6\\ 3 & -1 & 4\\ -2 & 2 & 2\end{bmatrix}=7.$$

Ответ

$$A=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -1 & -\frac{4}{7}\\ \frac{3}{7} & -\frac{5}{7} & 1 & \frac{1}{7}\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7}\end{bmatrix}.$$

Задача 5,43. Для матриц

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

найти обратные.

Ответ.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}; \qquad B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Выше было указано, что процесс определения обратной матрицы очень трудоемкий, когда порядок матрицы n большой. Уже для случая $n=4$ определение обратной матрицы в задаче 5,42 потребовало достаточно много времени. Мы укажем прием для вычисления обратной матрицы, который не вызывает столь значительных трудностей.

Пусть требуется найти матрицу, обратную квадратной матрице A порядка n. Разобьем эту матрицу на блоки и представим ее в виде

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}, \tag{5,3}$$

где α_{11} и α_{22} — квадратные матрицы, а матрицы α_{12} и α_{21} могут быть как квадратными, так и прямоугольными. Пусть

$$\beta = \alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}. \tag{5,4}$$

Тогда A^{-1}, обратная матрица для матрицы A, находится по формуле

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{-1} + \alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\beta^{-1}\alpha_{21}\alpha_{11}^{-1} & -\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\beta^{-1} \\ -\beta^{-1}\alpha_{21}\alpha_{11}^{-1} & \beta^{-1} \end{bmatrix}. \tag{5,5}$$

Непосредственным умножением A на A^{-1} легко усмотреть, что $AA^{-1} = E$.

Будем обозначать через A_2, A_3, A_4, ... квадратные матрицы порядков, соответственно равных 2, 3, 4, ... (т. е. индекс при названии матрицы указывает ее порядок).

Если обозначить

$$\gamma = \beta^{-1}\alpha_{21}, \tag{5,6}$$

то формула (5,5) примет более простой вид:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{-1} + \alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\gamma\alpha_{11}^{-1} & -\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\beta^{-1} \\ -\gamma\alpha_{11}^{-1} & \beta^{-1} \end{bmatrix}. \tag{5,7}$$

Этой формулой мы и будем пользоваться на практике. Она удобна тем, что содержит только две обратные матрицы: α_{11}^{-1} и β^{-1}. Выполним несколько упражнений на применение этой формулы. В дальнейшем операцию нахождения обратной матрицы для данной будем называть обращением матрицы.

Задача 5,44. Для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

найти обратную.

В задаче 5,42 обратная матрица для заданной была уже найдена самостоятельно. Здесь мы определим обратную матрицу по формуле (5,7).

Решение. Матрицу A разобьем на блоки и представим ее в таком виде:

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}.$$

У нас

$$\alpha_{11} = \begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{bmatrix}; \quad \alpha_{12} = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 3\end{bmatrix}; \quad \alpha_{21} = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 0\end{bmatrix}; \quad \alpha_{22} = \begin{bmatrix}0 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}.$$

Чтобы найти β, надо знать матрицу α_{11}^{-1}, обратную матрице α_{11}. Найти α_{11}^{-1} очень просто по формуле (5,2), которую мы здесь перепишем в виде

$$\alpha_{11}^{-1} = \frac{\tilde{\alpha}_{11}}{|\alpha_{11}|}.$$

Для матрицы α_{11} союзная матрица

$$\tilde{\alpha}_{11} = \begin{bmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix},$$

а определитель матрицы α_{11} равен

$$|\alpha_{11}| = \begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{bmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

Поэтому по предыдущей формуле

$$\alpha_{11}^{-1} = \begin{bmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix}.$$

Определяем β по формуле (5,4). Для этого вычислим произведение трех матриц

$$\alpha_{21}\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12} = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & 3\\4 & -2\end{bmatrix} \times$$
$$\times \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 9\\2 & -6\end{bmatrix};$$

$$\beta = \alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12} = \begin{bmatrix}0 & 2\\2 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1 & 9\\2 & -6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -7\\0 & 7\end{bmatrix}.$$

Чтобы использовать формулу (5,7), надо вычислить матрицу β^{-1}, обратную матрице β. Для этого применим формулу (5,2). Союзная для β матрица

$$\tilde{\beta} = \begin{bmatrix}7 & 7\\0 & 1\end{bmatrix},$$

а $|\beta| = 7$. Поэтому

$$\beta^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix}7 & 7\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

Теперь переходим к вычислению элементов матрицы (5,7). Начнем с ее элемента $\alpha_{11}^{-1}+\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\gamma\alpha_{11}^{-1}$. Прежде всего определим γ по формуле (5,6):

$$\gamma=\beta^{-1}\alpha_{21}=\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}7 & 7\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}21 & 14\\2 & 0\end{bmatrix};$$

$$\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}=\begin{bmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3\\-1 & 6\end{bmatrix};$$

$$\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\gamma=\begin{bmatrix}1 & -3\\-1 & 6\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{7}\begin{bmatrix}21 & 14\\2 & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}15 & 14\\-9 & -14\end{bmatrix};$$

$$\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\gamma\alpha_{11}^{-1}=\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}15 & 14\\-9 & -14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}-12 & 13\\24 & -19\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{12}{7} & \frac{13}{7}\\ \frac{24}{7} & -\frac{19}{7}\end{bmatrix}.$$

Первый элемент первой строки в матрице (5,7) равен

$$\alpha_{11}^{-1}+\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\gamma\alpha_{11}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{12}{7} & \frac{13}{7}\\ \frac{24}{7} & -\frac{19}{7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{6}{7}\\ \frac{3}{7} & -\frac{5}{7}\end{bmatrix}.$$

Второй элемент первой строки

$$-\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\beta^{-1}=-\begin{bmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 3\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}7 & 7\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -\frac{4}{7}\\ 1 & -\frac{1}{7}\end{bmatrix}.$$

Первый элемент второй строки в формуле (5,7)

$$-\gamma\alpha_{11}^{-1}=-\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}21 & 14\\2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\-\frac{4}{7} & \frac{2}{7}\end{bmatrix}.$$

Второй элемент второй строки

$$\beta^{-1}=\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}7 & 7\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & \frac{1}{7}\end{bmatrix}.$$

Подставляя найденные элементы матрицы (5,7), получаем окончательно

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -1 & -\frac{4}{7}\\ \frac{3}{7} & -\frac{5}{7} & 1 & -\frac{1}{7}\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7}\end{bmatrix}.$$

К решению задачи можно подойти и иначе. Разобьем матрицу A на блоки так:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Теперь уже

$$\alpha_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \alpha_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$\alpha_{21} = [2 \quad 0 \quad 2]; \quad \alpha_{22} = 1.$$

Для применения формулы (5,7) надо найти матрицу α_{11}^{-1}, обратную матрице α_{11}. Это можно сделать так: рассмотреть матрицу

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

и найти ей обратную по той же формуле, разбив ее на блоки следующим образом:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Здесь

$$\alpha_{11} = A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad \alpha_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \alpha_{21} = [1,\ 2]; \quad \alpha_{22} = 0.$$

Матрицу, обратную $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, надо найти непосредственно по формуле (5,2).

Если провести все вычисления, то окажется, что

$$A_3^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Остальные вычисления следует провести самостоятельно.

Задача 5,45. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A_4 = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

Решение. Разобьем матрицу A на блоки

$$A=\left[\begin{array}{ccc|c}5&7&6&5\\7&10&8&7\\6&8&10&9\\\hline 5&7&9&10\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}&&&5\\&A_3&&7\\&&&9\\\hline 5&7&9&10\end{array}\right].$$

Здесь

$$\alpha_{11}=A_3=\begin{bmatrix}5&7&6\\7&10&8\\6&8&10\end{bmatrix};\quad \alpha_{12}=\begin{bmatrix}5\\7\\9\end{bmatrix};$$

$$\alpha_{21}=[5,\ 7,\ 9];\ \alpha_{22}=10.$$

Для применения формулы (5,7) надо найти матрицу α_{11}^{-1}, обратную матрице $\alpha_{11}=A_3$, т. е. найти сначала A_3^{-1}. Сделаем это также по формуле (5,7).

Представим A_3 в виде блочной матрицы

$$A_3=\left[\begin{array}{cc|c}5&7&6\\7&10&8\\\hline 6&8&10\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|c}\multicolumn{2}{c|}{A_2}&6\\&&8\\\hline 6&8&10\end{array}\right].$$

Полагаем, что здесь

$$\alpha_{11}=A_2=\begin{bmatrix}5&7\\7&10\end{bmatrix};\quad \alpha_{12}=\begin{bmatrix}6\\8\end{bmatrix};\ \alpha_{21}=[6,\ 8];\ \alpha_{22}=10.$$

Чтобы использовать формулу (5,7) для вычисления A_3^{-1}, надо найти $\alpha_{11}^{-1}=A_2^{-1}$. Это следует сделать непосредственно по формуле (5,2). Окажется, что

$$\alpha_{11}^{-1}=A_2^{-1}=\begin{bmatrix}10&-7\\-7&5\end{bmatrix}.$$

При вычислении A_3^{-1} получим $\beta=2$,

$$A_3^{-1}=\begin{bmatrix}18&-11&-2\\-11&7&1\\-2&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

При вычислении A_4^{-1} найдем, что $\beta = \frac{1}{2}$,

$$\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\gamma\alpha_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 50 & -30 & -15 \\ -30 & 18 & 9 \\ -15 & 9 & 4{,}5 \end{bmatrix};$$

$$\alpha_{11}^{-1} + \alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\gamma\alpha_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 68 & -41 & -17 \\ -41 & 25 & 10 \\ -17 & 10 & 5 \end{bmatrix};$$

$$-\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\beta^{-1} = \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix};$$

$$-\gamma\alpha_{11}^{-1} = [10,\ -6,\ -3].$$

Окончательно

$$A_4^{-1} = \begin{bmatrix} 68 & -41 & -17 & 10 \\ -41 & 25 & 10 & -6 \\ -17 & 10 & 5 & -3 \\ 10 & -6 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Задача 5,46 (для самостоятельного решения) Найти матрицы, обратные данным:

$$1)\ A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix};\quad 2)\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix};$$

$$3)\ A_4 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ответ.

$$1)\ A_3^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix};\quad 2)\ A_3^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{22}{15} & -\frac{4}{15} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix};$$

$$3)\ A_4^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix}.$$

Обращение матрицы является весьма существенным при решении систем линейных алгебраических уравнений.

На этом занятии мы выполнили упражнения, которые знакомят с принципиальной стороной этого вопроса, с основной формулой для получения обратной матрицы [формула (5,2)] и ее применением, а также упражнения по формуле (5,7), которая не требует столь громоздких вычислений, как формула (5,2).

С другими численными методами получения обратной матрицы читатель может познакомиться по книге Р. Фрезер, В. Дункан и А. Коллар. «Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике» (Изд-во «Иностранная литература», Москва, 1950).

Содержание. Обращение треугольной матрицы (верхней и нижней). Разложение квадратной матрицы на произведение двух треугольных. Вычисление обратной матрицы при помощи представления ее в виде произведения двух треугольных матриц.

1. ОБРАЩЕНИЕ ВЕРХНЕЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

Краткие сведения из теории

Сущность метода обращения верхней треугольной матрицы разберем на матрицах четвертого порядка, а формулы для обращения верхней треугольной матрицы любого порядка приведем без вывода. (Заметим еще раз, что обращение матриц имеет исключительно большое значение для решения систем линейных алгебраических уравнений, которыми мы будем заниматься на следующем практическом занятии)

Пусть A — верхняя треугольная матрица четвертого порядка

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix},$$

а искомая обратная ей матрица, элементы которой α_{ij} подлежат определению, запишется в виде

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix}.$$

По определению обратной матрицы должно выполняться равенство

$$A^{-1}A = E,$$

т. е.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Используя правило умножения матриц, перемножим матрицы в левой части равенства

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}a_{11} & \alpha_{11}a_{12}+\alpha_{12}a_{22} & \alpha_{11}a_{13}+\alpha_{12}a_{23}+\alpha_{13}a_{33} & \alpha_{11}a_{14}+\alpha_{12}a_{24}+\alpha_{13}a_{34}+\alpha_{14}a_{44} \\ \alpha_{21}a_{11} & \alpha_{21}a_{12}+\alpha_{22}a_{22} & \alpha_{21}a_{13}+\alpha_{22}a_{23}+\alpha_{23}a_{33} & \alpha_{21}a_{14}+\alpha_{22}a_{24}+\alpha_{23}a_{34}+\alpha_{24}a_{44} \\ \alpha_{31}a_{11} & \alpha_{31}a_{12}+\alpha_{32}a_{22} & \alpha_{31}a_{13}+\alpha_{32}a_{23}+\alpha_{33}a_{33} & \alpha_{31}a_{14}+\alpha_{32}a_{24}+\alpha_{33}a_{34}+\alpha_{34}a_{44} \\ \alpha_{41}a_{11} & \alpha_{41}a_{12}+\alpha_{42}a_{22} & \alpha_{41}a_{13}+\alpha_{42}a_{23}+\alpha_{43}a_{33} & \alpha_{41}a_{14}+\alpha_{42}a_{24}+\alpha_{43}a_{34}+\alpha_{44}a_{44} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Исходя из определения равенства двух матриц, для отыскания неизвестных величин получаем уравнения, сравнив соответствующие элементы первых строк,

$$\alpha_{11}a_{11} = 1; \tag{1}$$

$$\alpha_{11}a_{12} + \alpha_{12}a_{22} = 0; \tag{2}$$

$$\alpha_{11}a_{13} + \alpha_{12}a_{23} + \alpha_{13}a_{33} = 0; \tag{3}$$

$$\alpha_{11}a_{14} + \alpha_{12}a_{24} + \alpha_{13}a_{34} + \alpha_{14}a_{44} = 0. \tag{4}$$

Из этих уравнений следует:

из (1) $\alpha_{11} = \dfrac{1}{a_{11}}$; (5)

из (2) $\alpha_{12} = -\dfrac{\alpha_{11}a_{12}}{a_{22}} = -\dfrac{1}{a_{22}}\alpha_{11}a_{12}$; (6)

из (3) $\alpha_{13} = -\dfrac{\alpha_{11}a_{13} + \alpha_{12}a_{23}}{a_{33}} = -\dfrac{1}{a_{33}}\sum\limits_{k=1}^{2}\alpha_{1k}a_{k3}$; (7)

из (4) $\alpha_{14} = -\dfrac{\alpha_{11}a_{14} + \alpha_{12}a_{24} + \alpha_{13}a_{34}}{a_{44}} = -\dfrac{1}{a_{44}}\sum\limits_{k=1}^{3}\alpha_{1k}a_{k4}$. (8)

Проделав аналогичную работу для второй, третьей и четвертой строк, получим для второй строки

$$\alpha_{21}a_{11} = 0; \tag{9}$$

$$\alpha_{21}a_{12} + \alpha_{22}a_{22} = 1; \tag{10}$$

$$\alpha_{21}a_{13} + \alpha_{22}a_{23} + \alpha_{23}a_{33} = 0; \tag{11}$$

$$\alpha_{21}a_{14} + \alpha_{22}a_{24} + \alpha_{23}a_{34} + \alpha_{24}a_{44} = 0 \tag{12}$$

из (9) $\alpha_{21} = 0$. (13)

С учетом, что $\alpha_{21} = 0$, получаем:

из (10) $\alpha_{22} = \frac{1}{a_{22}}$; (14)

из (11) $\alpha_{23} = -\frac{\alpha_{22} a_{23}}{a_{33}} = -\frac{1}{a_{33}} \alpha_{22} a_{23}$; (15)

из (12) $\alpha_{24} = -\frac{\alpha_{21} a_{14} + \alpha_{22} a_{24} + \alpha_{23} a_{34}}{a_{44}} = -\frac{1}{a_{44}} \sum_{k=1}^{3} \alpha_{2k} a_{k4}$. (16)

Для третьей строки

$$\alpha_{31} a_{11} = 0; \tag{17}$$

$$\alpha_{31} a_{12} + \alpha_{32} a_{22} = 0; \tag{18}$$

$$\alpha_{31} a_{13} + \alpha_{32} a_{23} + \alpha_{33} a_{33} = 1; \tag{19}$$

$$\alpha_{31} a_{14} + \alpha_{32} a_{24} + \alpha_{33} a_{34} + \alpha_{34} a_{44} = 0. \tag{20}$$

Из этих уравнений следует:

из (17) $\alpha_{31} = 0$. (21)

Учитывая, что $\alpha_{31} = 0$, из (18) получаем

$$\alpha_{32} = 0, \tag{22}$$

а учитывая, что и $\alpha_{31} = 0$, и $\alpha_{32} = 0$, находим:

из (19) $\alpha_{33} = \frac{1}{a_{33}}$; (23)

из (20) $\alpha_{34} = -\frac{\alpha_{33} a_{34}}{a_{44}} = -\frac{1}{a_{44}} \alpha_{33} a_{34}$. (24)

И наконец, для четвертой строки имеем

$$\alpha_{41} a_{11} = 0; \tag{25}$$

$$\alpha_{41} a_{12} + \alpha_{42} a_{22} = 0; \tag{26}$$

$$\alpha_{41} a_{13} + \alpha_{42} a_{23} + \alpha_{43} a_{33} = 0; \tag{27}$$

$$\alpha_{41} a_{14} + \alpha_{42} a_{24} + \alpha_{43} a_{34} + \alpha_{44} a_{44} = 1. \tag{28}$$

Из (25), (26) и (27) следует, что

$$\alpha_{41} = 0; \tag{29}$$

$$\alpha_{42} = 0; \tag{30}$$

$$\alpha_{43} = 0, \tag{31}$$

а с учетом этого из (28) получаем

$$\alpha_{44} = \frac{1}{a_{44}}. \tag{32}$$

Равенства (9), (21), (22), (29), (30) и (31) показывают, что равны нулю те элементы обратной матрицы A^{-1}, у которых первый индекс i больше второго индекса j, т. е. если $i > j$, то

$$\alpha_{ij} = 0. \tag{6,1}$$

Из равенств (5), (14), (23) и (32) диагональные элементы обратной матрицы A^{-1}, у которых первый и второй индексы равны ($i = j$), определяются так:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{a_{11}}; \quad \alpha_{22} = \frac{1}{a_{22}}; \quad \alpha_{33} = \frac{1}{a_{33}}; \quad \alpha_{44} = \frac{1}{a_{44}},$$

что можно объединить одной записью: если $i = j$, то

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}. \tag{6,2}$$

По формулам (6), (7), (8), (15), (16), (24) и (32) определяются те элементы обратной матрицы для верхней треугольной, у которых первый индекс i меньше второго индекса j ($i < j$), т.е. элементы, стоящие над главной диагональю. Полученная по этим формулам обращенная матрица будет также верхней треугольной.

Когда верхняя треугольная матрица имеет порядок n, элементы обратной ей матрицы находятся по аналогичным формулам, которые имеют следующий вид:

$$\text{если } i = j, \quad \text{то } \alpha_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}; \tag{6,3}$$

$$\text{если } i > j, \quad \text{то } \alpha_{ij} = 0; \tag{6,4}$$

$$\text{если } i < j, \text{ то } \alpha_{ij} = -\frac{1}{a_{jj}} \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{ik} a_{kj}. \tag{6,5}$$

Например, по формуле (6,5) элемент обратной матрицы

$$\alpha_{15} = -\frac{1}{a_{55}} \sum_{k=1}^{4} \alpha_{1k} a_{k5} =$$

$$= -\frac{1}{a_{55}} (\alpha_{11} a_{15} + \alpha_{12} a_{25} + \alpha_{13} a_{35} + \alpha_{14} a_{45}). \tag{6,6}$$

Замечания. Применяя формулу (6,5), надо иметь в виду, что будут равны нулю те произведения, в которых первый индекс элемента α больше второго индекса. Можно указать простое правило для определения элементов обращенной верхней треугольной матрицы.

1. Определить диагональные элементы обращенной матрицы по формуле (6,3).
2. После этого матрицы подписать одну под другой.
3. На места элементов, стоящих ниже главной, вписать нули.
4. Чтобы определить элемент, стоящий над главной диагональю обратной матрицы, надо составить алгебраическую сумму произведений элементов, стоящих в обращенной матрице A^{-1}, левее определяемого, на соответствующие элементы того столбца матрицы A (т. е. той матрицы, для которой ищется обратная), в ко-

тором стоит определяемый элемент. Эту алгебраическую сумму надо разделить на диагональный элемент матрицы A, стоящий в том же столбце, что и определяемый элемент. Определяемый элемент равен этому частному, взятому с обратным знаком.

По этому правилу выражение в скобках в (6,6) получается так: искомый элемент α_{15} матрицы A^{-1} находится в первой строке и пятом столбце. Перед ним в первой строке обратной матрицы A^{-1} стоят элементы α_{11}, α_{12}, α_{13}, и α_{14}, а в пятом столбце матрицы A — элементы a_{15}, a_{25}, a_{35} и a_{45}. Составляется алгебраическая сумма произведений первого элемента в первой строке матрицы A^{-1} на первый элемент в пятом столбце матрицы A, второго элемента в первой строке матрицы A^{-1} на второй элемент в пятом столбце матрицы A и т. д. Для уяснения этого правила решим несколько задач.

Задача 6,1. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 8 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 6 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}.$$

Решение. п. 1. Находим диагональные элементы α_{11}, α_{22}, α_{33} и α_{44} обращенной матрицы по формуле (6,3)

$$\alpha_{11}=\frac{1}{a_{11}}=\frac{1}{3};\quad \alpha_{22}=\frac{1}{a_{22}}=\frac{1}{8};\quad \alpha_{33}=\frac{1}{a_{33}}=\frac{1}{6};\quad \alpha_{44}=\frac{1}{4}.$$

пп. 2 и 3. Подписываем матрицы одну под другой и вписываем нули на места элементов, стоящих под главной диагональю

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 8 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 6 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix};$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & & & \\ 0 & \frac{1}{8} & & \alpha_{ij}\\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}.$$

п. 4. Определяем элементы α_{ij}, стоящие над главной диагональю ($i < j$), по формуле (6,5), пользуясь указанным в п. 4 правилом.

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{3} & -\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{8}=-\frac{1}{24} & -\frac{\frac{1}{3}\cdot 2+\left(-\frac{1}{24}\right)\cdot 3}{6}=\frac{-13}{144} & -\frac{\frac{1}{3}\cdot 1+\left(-\frac{1}{24}\right)\cdot 2+\left(-\frac{13}{144}\right)\cdot 4}{4}=\frac{1}{36} \\
0 & \frac{1}{8} & -\frac{0\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 3}{6}=-\frac{1}{16} & -\frac{0\cdot 1+\frac{1}{8}\cdot 2+\left(-\frac{1}{16}\right)\cdot 4}{4}=0 \\
0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{0\cdot 1+0\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot 4}{4}=-\frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}
\end{bmatrix};
$$

$$
A^{-1}=\begin{bmatrix}
\frac{1}{3} & -\frac{1}{24} & -\frac{13}{144} & \frac{1}{36} \\
0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}
\end{bmatrix}.
$$

Для проверки перемножьте матрицы A и A^{-1} и убедитесь, что получится единичная матрица

$$
E_4=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}.
$$

При решении этой задачи все элементы обратной матрицы были представлены в виде простых дробей. Мы так поступили для облегчения контроля. На практике же все вычисления ведутся в десятичных дробях.

Отметим, что вычисление $\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}a_{kj}$ по формуле (6,5) с помощью настольных клавишных счетных машин или на арифмометре не требует никаких промежуточных записей, так как эти машины позволяют производить накопление произведений.

Задача 6,2 (для самостоятельного решения). Найти матрицы, обратные верхним треугольным:

$$1)\quad A=\begin{bmatrix}2&5&4&3\\0&3&4&2\\0&0&3&1\\0&0&0&4\end{bmatrix};\qquad 2)\quad A=\begin{bmatrix}1&2&-1&3&5\\0&-1&2&1&4\\0&0&5&-2&3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&-4\end{bmatrix};$$

$$3)\quad A=\begin{bmatrix}-3&2&0&5&4&6\\0&2&-4&0&2&-1\\0&0&1&-3&2&7\\0&0&0&3&0&1\\0&0&0&0&4&2\\0&0&0&0&0&3\end{bmatrix}$$

и проверить ответ умножением A на A^{-1} (произведение должно быть единичной матрицей).

Ответ. 1)

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{5}{6}&+\frac{4}{9}&-\frac{5}{72}\\0&\frac{1}{3}&-\frac{4}{9}&-\frac{1}{18}\\0&0&+\frac{1}{3}&-\frac{1}{12}\\0&0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix};$$

2)

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&+2&-\frac{3}{5}&-\frac{31}{5}&-\frac{3}{10}\\0&-1&\frac{2}{5}&\frac{9}{5}&\frac{1}{5}\\0&0&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{7}{20}\\0&0&0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&-\frac{1}{4}\end{bmatrix};$$

3)

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&+\frac{1}{3}&\frac{4}{3}&\frac{17}{9}&-\frac{1}{2}&-\frac{71}{27}\\0&\frac{1}{2}&2&2&-\frac{5}{4}&-\frac{13}{3}\\0&0&1&1&-\frac{1}{2}&-\frac{7}{3}\\0&0&0&\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{9}\\0&0&0&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{6}\\0&0&0&0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

Поступая так же, как и для обращения верхней треугольной матрицы, получаем формулы для определения элементов матрицы, которая обратна нижней треугольной матрице

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \ldots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix};$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 & 0 \ldots & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & 0 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \beta_{n3} & \beta_{n4} \ldots & \beta_{nn} \end{bmatrix}.$$

При $i < j \qquad \beta_{ij} = 0$ (6,7)

(т. е. все элементы, находящиеся над главной диагональю, равны нулю).

При $i = j \qquad \beta_{ii} = \frac{1}{b_{ii}}.$ (6,8)

По этой формуле находятся диагональные элементы.

При $i > j \quad \beta_{ij} = -\frac{1}{b_{ii}} \sum_{k=1}^{i-1} \beta_{kj} b_{ik}.$ (6,9)

По этой формуле определяются элементы, находящиеся ниже главной диагонали. Из приведенных формул видно, что обратная матрица для нижней треугольной является также нижней треугольной.

Пример применения формулы (6,9). Пусть требуется определить β_{53} ($i = 5$; $j = 3$; $i > j$).

$$\beta_{53} = -\frac{1}{b_{55}} \sum_{k=1}^{4} \beta_{k3} b_{5k};$$

$$\beta_{53} = -\frac{1}{b_{55}} (\beta_{13} b_{51} + \beta_{23} b_{52} + \beta_{33} b_{53} + \beta_{43} b_{54}).$$

В скобки заключена алгебраическая сумма произведений элементов, начиная с первого, того столбца, в котором находится определяемый элемент, на соответствующие элементы той строки матрицы B (той матрицы, для которой ищется обратная), в которой стоит определяемый элемент. Среди произведений, стоящих в скобке, могут быть и равные нулю. Это будут те произведения, у которых множитель β имеет первый индекс меньше второго.

Задача 6,3. Найти матрицу, обратную нижней треугольной матрице

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 4 & 0\\ 3 & 2 & -1 & 3\end{bmatrix}.$$

Решение. Прежде всего по формуле (6,8) определяем диагональные элементы: $\beta_{11}=\frac{1}{b_{11}}=\frac{1}{1}=1$; $\beta_{22}=\frac{1}{b_{22}}=\frac{1}{2}$; $\beta_{33}=\frac{1}{b_{33}}=\frac{1}{4}$; $\beta_{44}=\frac{1}{b_{44}}=\frac{1}{3}$.

Вписываем эти элементы в главную диагональ и вписываем нули на места над ней. Теперь следует определить элементы β_{21}; β_{31}; β_{32}; β_{41}; β_{42}; β_{43}.

Эти элементы вычислим по формуле (6,9). Для удобства помещаем матрицу B^{-1} под матрицей B.

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 4 & 0\\ 3 & 2 & -1 & 3\end{bmatrix};$$

$$B^{-1}=\left[\begin{array}{r} 1 \\ -\frac{1}{2}\cdot(1\cdot 0)=0 \\ -\frac{1}{4}\left[1\cdot 2+0\cdot(-3)\right]=-\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3}\left[1\cdot 3+0\cdot 2+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)\right]=-\frac{7}{6}\end{array}\right. \quad \text{I столбец}$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\left[0\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot(-3)\right]=\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{3}\left[0\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{3}{8}\cdot(-1)\right]=-\frac{5}{24}\end{array} \quad \text{II столбец}$$

$$\left.\begin{array}{rr} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{3}\left[0\cdot 3+0\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot(-1)\right]=\frac{1}{12} & \frac{1}{3}\end{array}\right]; \quad \text{III и IV столбцы}$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{7}{6} & -\frac{5}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

Задача 6,4 (для самостоятельного решения). Найти матрицы, обратные следующим:

$$1)\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 4\end{bmatrix};\qquad 2)\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ -4 & 5 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix};$$

$$3)\quad B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 3 & -2 & 4 & 0\\ -3 & -2 & -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

и вычисления проверить умножением B на B^{-1}.

Ответ.

$$1)\quad B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ -\frac{7}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4}\end{bmatrix};$$

$$2)\quad B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ +2 & 1 & 0 & 0\\ -2 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2}\end{bmatrix};$$

$$3)\quad B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ -\frac{1}{48} & -\frac{13}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{7}{40} & \frac{7}{20} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}.$$

III. РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ НА ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ТРЕУГОЛЬНЫХ

Основные сведения из теории

Многие методы решения системы линейных алгебраических уравнений основаны на представлении квадратной матрицы (не треугольной) в виде произведения двух треугольных матриц, из которых одна нижняя, а другая верхняя. Для любой квадратной матрицы

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

такое представление является возможным и единственным при соблюдении следующих условий:

1) диагональные элементы одной из треугольных матриц отличны от нуля;

2) главные диагональные миноры отличны от нуля (так называются миноры определителя матрицы, у которых на главных диагоналях стоят диагональные элементы матрицы).

Такими минорами, например, будут:

$$a_{11}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

а также и сам определитель матрицы $|A|$.

Рассмотрим такое представление на примере квадратной матрицы четвертого порядка ($n = 4$). Пусть требуется матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

представить как произведение двух треугольных матриц (нижней и верхней)

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{bmatrix},$$

т. е. предполагается, что имеет место равенство

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{bmatrix}. \tag{6,10}$$

Задача заключается в определении элементов c_{ij} $(i \geqslant j)$ и b_{ij} $(i \leqslant j)$. Таких неизвестных элементов у нас 20, так как $n^2 + n = 16 + 4 = 20$. Это следует из формулы для суммы членов арифметической прогрессии.

Перемножим матрицы в правой части равенства (6,10) по правилу умножения матриц и, пользуясь равенством

$$A = CB,$$

приравняем элементы матрицы CB соответствующим элементам матрицы A.

Получим такие равенства:

$$\left.\begin{array}{rl} c_{11}b_{11} = a_{11}; & (1) \\ c_{11}b_{12} = a_{12}; & (2) \\ c_{11}b_{13} = a_{13}; & (3) \\ c_{11}b_{14} = a_{14}; & (4) \\ c_{21}b_{11} = a_{21}; & (5) \\ c_{21}b_{12} + c_{22}b_{22} = a_{22}; & (6) \\ c_{21}b_{13} + c_{22}b_{23} = a_{23}; & (7) \\ c_{21}b_{14} + c_{22}b_{24} = a_{24}; & (8) \\ c_{31}b_{11} = a_{31}; & (9) \\ c_{31}b_{12} + c_{32}b_{22} = a_{32}; & (10) \\ c_{31}b_{13} + c_{32}b_{23} + c_{33}b_{33} = a_{33}; & (11) \\ c_{31}b_{14} + c_{32}b_{24} + c_{33}b_{34} = a_{34}; & (12) \\ c_{41}b_{11} = a_{41}; & (13) \\ c_{41}b_{12} + c_{42}b_{22} = a_{42}; & (14) \\ c_{41}b_{13} + c_{42}b_{23} + c_{43}b_{33} = a_{43}; & (15) \\ c_{41}b_{14} + c_{42}b_{24} + c_{43}b_{34} + c_{44}b_{44} = a_{44}; & (16) \end{array}\right\} \tag{6,11}$$

Мы получили 16 уравнений для определения 20 неизвестных. Поэтому четырем неизвестным можно приписать любые значения, причем для этого имеется бесконечное множество возможностей.

Пользуясь произвольностью выбора значений четырех неизвестных, положим, что каждый из четырех диагональных элементов в первой матрице правой части (6,10) равен единице:

$$c_{11} = 1; \ c_{22} = 1; \ c_{33} = 1; \ c_{44} = 1.$$

Тогда первые четыре уравнения в (6,11) позволят определить неизвестные элементы b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}, и окажется, что

$$b_{11} = a_{11};\ b_{12} = a_{12};\ b_{13} = a_{13};\ b_{14} = a_{14}. \tag{6,12}$$

Из уравнений (5), (9) и (13) с учетом, что $b_{11} = a_{11}$, получаем:

$$c_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}};\quad c_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}};\quad c_{41} = \frac{a_{41}}{a_{11}}. \tag{6,13}$$

Зная, что $c_{22} = 1$, из уравнений (6), (7) и (8) находим

$$\begin{aligned} b_{22} &= a_{22} - c_{21}b_{12} = a_{22} - \sum_{k=1}^{1} c_{2k}b_{k2};\\ b_{23} &= a_{23} - c_{21}b_{13} = a_{23} - \sum_{k=1}^{1} c_{2k}b_{k3};\\ b_{24} &= a_{24} - c_{21}b_{14} = a_{24} - \sum_{k=1}^{1} c_{2k}b_{k4}. \end{aligned} \tag{6,14}$$

Здесь символ суммирования $\sum\limits_{k=1}^{1}$, собственно, ничего нового не дает. Мы его ввели для последующих обобщений — см. формулы (6,19) и (6,20).

Замечание. Как покажут дальнейшие вычисления, суммирование производится по индексу k, который изменяется от 1 до $i-1$, где i — первый индекс у определяемого элемента. В данном случае у определяемых элементов b_{22}, b_{23} и b_{24} первый индекс $i = 2$.

Из уравнений (10) и (14) находим c_{32} и c_{42}:

$$\left.\begin{aligned} c_{32} &= \frac{a_{32} - c_{31}b_{12}}{b_{22}} = \frac{a_{32} - \sum\limits_{k=1}^{1} c_{3k}b_{k2}}{b_{22}};\\ c_{42} &= \frac{a_{42} - c_{41}b_{12}}{b_{22}} = \frac{a_{42} - \sum\limits_{k=1}^{1} c_{4k}b_{k2}}{b_{22}}. \end{aligned}\right\} \tag{6,15}$$

В символе $\sum\limits_{k=1}^{1}$ индекс суммирования k изменяется от 1 до 1, т. е. фактически принимает только одно значение, равное 1, причем 1, стоящая сверху, есть $2-1$, т. е. $j-1$, где j — второй индекс у определяемых элементов c_{32} и c_{42}. Как уже было замечено выше, введение такого символа в этом месте ничего нового не дает, но необходимо для ссылок при последующем обобщении этих формул.

Из уравнений (11) и (12) определим элементы b_{34} и b_{33} (учитывая, что $c_{33}=1$):

$$\left.\begin{aligned} b_{33} &= a_{33}-c_{31}b_{13}-c_{32}b_{23}=a_{33}-\sum_{k=1}^{2}c_{3k}b_{k3};\\ b_{34} &= a_{34}-c_{31}b_{14}-c_{32}b_{24}=a_{34}-\sum_{k=1}^{2}c_{3k}c_{k4}; \end{aligned}\right\} \qquad (6,16)$$

В этих формулах индекс суммирования k в символе $\sum\limits_{k=1}^{2}$ изменяется от 1 до 2, а стоящее сверху этого символа число $2=3-1$, т. е. $i-1$, где i — первый индекс у определяемых элементов b_{33} и b_{34}.

Теперь из уравнения (15) найдем

$$c_{43}=\frac{a_{43}-c_{41}b_{13}-c_{42}b_{23}}{b_{33}}=\frac{a_{43}-\sum\limits_{k=1}^{2}c_{4k}b_{k3}}{b_{33}}. \qquad (6,17)$$

В символе $\sum\limits_{k=1}^{2}$ индекс суммирования k изменяется от 1 до 2, причем число 2, стоящее сверху, есть $j-1$, где j — второй индекс у определяемого элемента c_{43}.

Наконец, из уравнения (16), учитывая, что $c_{44}=1$, получаем

$$b_{44}=a_{44}-c_{41}b_{14}-c_{42}b_{24}-c_{43}b_{34}=a_{44}-\sum_{k=1}^{3}c_{4k}b_{k4}. \qquad (6,18)$$

Обратим опять внимание на то, что в символе $\sum\limits_{k=1}^{3}$ индекс суммирования k изменяется от 1 до 3, причем число 3, стоящее сверху, есть $4-1$, т. е. $i-1$, где i — первый индекс у определяемого элемента b_{44}.

Заметим, что определение элементов b_{ij} и c_{ij} чередуется: по формулам (6,12) определяются элементы b_{1j} $(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ затем по формулам (6,13) — элементы c_{i1} $(i=2,\ 3,\ 4)$. После этого опять определяются элементы b_{2j} $(j=2,\ 3,\ 4)$ по формулам (6,14), а вслед за этим по формулам (6,15) — элементы c_{i2} $(i=3,\ 4)$, потом — опять элементы b_{3j} $(j=3,\ 4)$ по формулам (6,16), а за ними — элементы c_{43} по формуле (6,17) и, наконец, определяется элемент b_{44} по формуле (6,18).

Если объединить формулы (6,14), (6,16) и (6,18) в одну, то окажется, что

$$b_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}c_{ik}b_{kj};\ (i<j) \qquad (6,19)$$

$$(i=2,\ 3,\ 4;\ j=2,\ 3,\ 4),$$

а объединение формул (6,15) и (6,17) дает

$$c_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} c_{ik} b_{kj}}{b_{jj}}; \quad (i > j) \tag{6,20}$$

$$(i = 3,\ 4;\ j = 2,\ 3).$$

Формулы (6,19) и (6,20) остаются верными для представления квадратных матриц любого порядка n в виде произведения двух треугольных матриц.

Легко показать схематически последовательность, в которой определяются элементы b_{ij} и c_{ij}: сначала заполняются строки, а потом — столбцы (см. табл. 1)

Таблица 1

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 1 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccl} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & \text{— первый шаг} \\ c_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & \text{— второй шаг} \\ c_{31} & c_{32} & b_{33} & b_{34} & \text{— третий шаг} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & b_{44} & \text{— четвертый шаг} \end{array}$$

$$b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik} b_{kj}; \quad (i \leqslant j)$$

$$c_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} c_{ik} b_{kj}}{b_{jj}}; \quad (i > j)$$

Представление квадратной матрицы в виде произведения нижней и верхней треугольных матриц производится так: для удобства вычислений записывается данная матрица A, а под ней — матрицы C и B, как указано в табл. 2, на стр. 156, причем вместо диагональных элементов матрицы C вписываются единицы.

Первая строка матрицы B и первый столбец матрицы C заполняются так, как указано в табл. 2:

1. На основании формул (6,12) в первую строку вписываются соответствующие элементы матрицы A, а элементы первого столбца матрицы C равны соответствующим элементам первого столбца матрицы A, разделенным на его первый элемент — формулы (6,13).

2. Элементы, стоящие *над ступенчатой линией*, находятся по формуле (6,19) так: берется соответствующий элемент матрицы A и из него вычитаются произведения элементов, стоящих в той же строке левее и в том же столбце выше, что и вычисляемый элемент, причем первый элемент строки умножается на первый элемент столбца, второй элемент строки — на второй элемент столбца и т. д.

Таблица 2

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

$c_{11} = 1$	$b_{11} = a_{11}$	$b_{12} = a_{12}$	$b_{13} = a_{13}$	$b_{14} = a_{14}$
$c_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$	$c_{22} = 1$ $\quad b_{22}$	b_{23}	b_{24}	
$c_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$	c_{32}	$c_{33} = 1$ $\quad b_{33}$	b_{34}	
$c_{41} = \frac{a_{41}}{a_{11}}$	c_{42}	c_{43}	$c_{44} = 1$ $\quad b_{44}$	

3. При вычислении же элементов, расположенных *под ступенчатой линией*, поступают так же, как в п. 2, но полученный результат делят на диагональный элемент b_{jj} ($j = 2, 3$), стоящий в том же столбце (формула (6,20), что и определяемый элемент. При вычислениях с помощью арифмометра или настольных клавишных машин никаких записей вне таблицы производить не придется.

Этот алгоритм вычисления элементов двух треугольных матриц — нижней и верхней, на которые разлагается матрица A, легко распространяется на квадратные матрицы любого порядка, что будет показано на ряде примеров, помещенных ниже.

Задача 6,5.

Матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 4 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

представить в виде произведения нижней и верхней треугольных матриц.

Решение. Используем только что указанный порядок действий и расположим действия, как в табл. 2, причем приведем подробно все выкладки в каждой клетке и будем придерживаться порядка заполнения клеток, указанного в табл. 1:

1	2	3	4
−1	2	4	−3
2	4	5	−2
4	3	2	1

1	1	2	3	4
$-\frac{1}{1}=-1$	1	$2-(-1)\times 2=4$	$4-(-1)\cdot 3=7$	$-3-(-1)\cdot 4=1$
$\frac{2}{1}=2$	$\frac{4-2\cdot 2}{4}=0$	1	$5-2\cdot 3-0\times 7=-1$	$-2-2\cdot 4-0\cdot 1=-10$
$\frac{4}{1}=4$	$\frac{3-4\cdot 2}{4}=-\frac{5}{4}$	$\frac{2-4\cdot 3-\left(-\frac{5}{4}\right)\cdot 7}{-1}=\frac{5}{4}$	1	$1-4\cdot 4-\left(-\frac{5}{4}\right)-\frac{5}{4}\cdot(-10)=-\frac{5}{4}$

Итак, нижняя треугольная матрица

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} & 1 \end{bmatrix},$$

а верхняя треугольная матрица

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{bmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$CB=A.$$

Сделайте это.

	2	-3	4	5	-1
	1	3	-2	2	4
	5	2	-1	3	2
	-4	2	0	-5	0
	3	-1	1	2	4
1	2	-3	4	5	-1
	$\frac{1}{2}$	1 $\quad 3-\frac{1}{2}\cdot(-3)=\frac{9}{2}$	$-2-\frac{1}{2}\cdot 4=-4$	$2-\frac{1}{2}\cdot 5=-\frac{1}{2}$	$4-\frac{1}{2}\cdot(-1)=\frac{9}{2}$
	$\frac{5}{2}$	$\frac{2-\frac{5}{2}\cdot(-3)}{\frac{9}{2}}=\frac{19}{9}$	1 $\quad -1-\frac{5}{2}\cdot 4-\frac{19}{9}(-4)=-\frac{23}{9}$	$3-\frac{5}{2}\cdot 5-\frac{19}{9}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{76}{9}$	$2-\frac{5}{2}\cdot(-1)-\frac{19}{9}\cdot\frac{9}{2}=-5$
	-2	$\frac{2-(-2)\cdot(-3)}{\frac{9}{2}}=-\frac{8}{9}$	$\frac{0-(-2)\cdot 4-\left(-\frac{8}{9}\right)(-4)}{-\frac{23}{9}}=-\frac{40}{23}$	1 $\quad -5-(-2)\times 5-\left(-\frac{8}{9}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{40}{23}\right)\times\left(-\frac{76}{9}\right)=-\frac{233}{23}$	$0-(-2)\cdot(-1)-\left(-\frac{8}{9}\right)\cdot\left(\frac{9}{2}\right)-\left(-\frac{40}{23}\right)\cdot(-5)=-\frac{154}{23}$
	$\frac{3}{2}$	$\frac{-1-\frac{3}{2}\cdot(-3)}{\frac{9}{2}}=\frac{7}{9}$	$\frac{1-\frac{3}{2}\cdot 4-\frac{7}{9}\cdot(-4)}{-\frac{23}{9}}=\frac{17}{23}$	$\left[2-\frac{3}{2}\cdot 5-\frac{7}{9}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{17}{23}\times\left(-\frac{76}{9}\right)\right]:\left(-\frac{233}{23}\right)=-\frac{26}{233}$	1 $\quad 4-\frac{3}{2}\cdot(-1)-\frac{7}{9}\cdot\frac{9}{2}-\frac{17}{23}\times(-5)-\left(\frac{26}{233}\right)\times\left(-\frac{154}{23}\right)=\frac{1153}{233}$

Решение было проведено в простых, а не десятичных дробях, как это обыкновенно делается на практике, для облегчения последующей проверки.

Проведем вторично подробное решение еще одной аналогичной задачи для матрицы пятого порядка.

Задача 6,6.

Матрицу

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 0 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

представить в виде произведения нижней и верхней треугольных матриц.

Решение. Поступаем так же, как и в предыдущей задаче: искомые матрицы подпишем под матрицей A, неизвестные элементы определяем в порядке, указанном в табл. 1, а их числовые значения — по приведенному алгоритму (см. пояснения, данные к табл. 2). Решение проведено на стр. 158.

Таким образом, данная матрица равна произведению двух треугольных матриц:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{19}{9} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{8}{9} & -\frac{40}{23} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{9} & \frac{17}{23} & -\frac{26}{233} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & \frac{9}{2} & -4 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{23}{9} & -\frac{76}{9} & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{233}{23} & -\frac{154}{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1153}{233} \end{bmatrix}.$$

Задача 6,7 (для самостоятельного решения). Представить матрицы

$$1)\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix};\quad 2)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix};$$

$$3)\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & -7 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

в виде произведения нижней и верхней треугольных матриц. Полученные ответы проверить умножением.

Ответ.

$$
1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0{,}1818 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}0909 & -0{,}6964 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 0{,}5 & -7 \\ 0 & 0 & -5{,}0909 & -2{,}7274 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}5357 \end{bmatrix};
$$

$$
2)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -0{,}7272 & 1 & 0 \\ -4 & -0{,}8182 & 0{,}7183 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -11 & 2 & -17 \\ 0 & 0 & 6{,}4544 & 5{,}6376 \\ 0 & 0 & 0 & -3{,}9589 \end{bmatrix};
$$

$$
3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}25 & 0{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 1{,}0 & 2{,}5 & 0{,}8182 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & -1{,}5 & 0{,}4545 & -7{,}1542 & 1 \end{bmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3{,}5 \\ 0 & 0 & -5{,}5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1{,}7726 & -4{,}7500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 31{,}2324 \end{bmatrix}.
$$

Задача 6,8. При определении неизвестных элементов c_{ij} и b_{ij} мы приняли, что $c_{ii} = 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Показать, что если взять $b_{ii} = 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, то неизвестные элементы b_{ij} и c_{ij} матриц, стоящих в правой части формулы (6,10), определятся по следующим формулам:

$$
\left.\begin{array}{c}
b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{44} = 1 \\
c_{11} = a_{11};\ c_{21} = a_{21};\ c_{31} = a_{31},\ \ldots \\
b_{12} = \dfrac{a_{12}}{a_{11}};\quad b_{13} = \dfrac{a_{13}}{a_{11}};\quad b_{14} = \dfrac{a_{14}}{a_{11}}; \\
b_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} c_{ik} b_{kj}}{c_{ii}},\ \text{если } i < j \\
c_{ij} = a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} c_{ik} b_{kj},\ \text{если } i > j
\end{array}\right\}. \qquad (6{,}21)
$$

Указание. В этом случае матрица A представляется в виде произведения таких двух треугольных матриц (нижней и верхней):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Последовательность определения элементов c_{ij} $(i \geqslant j)$ и b_{ij} $(i < j)$ указывается такой схемой:

$$\begin{array}{l|l|l|l}
c_{11} = a_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \ \dots \\
 & \multicolumn{3}{c}{\mathrm{II} \longrightarrow} \\
 \mathrm{I} & & & \\
c_{21} = a_{21} & c_{22} & b_{23} & b_{24} \ \dots \\
 & \mathrm{III} & \multicolumn{2}{c}{\mathrm{IV} \longrightarrow} \\
c_{31} = a_{31} & c_{32} & c_{33} & b_{34} \ \dots \\
 & & \mathrm{V} & \mathrm{VI} \longrightarrow \\
c_{41} = 41 \downarrow & c_{42} \downarrow & c_{43} \downarrow & \text{и т. д.}
\end{array}$$

(Римские цифры над стрелками указывают последовательность, в которой должны определяться элементы).

Задача 6,9. Пользуясь формулами (6,21), представить матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

в виде произведения двух треугольных матриц нижней и верхней.

Решение. Поступим так же, как и в предыдущем случае. Напишем матрицу A, а под ней матрицы C и B — см. формулу (6,10), причем вместо диагональных элементов матрицы B впишем 1. В нижней таблице подробно выполнены все вычисления по формулам (6,21).

2	4	6	2
4	2	2	1
1	2	1	1
-3	1	1	2
2 │ 1	2	3	1
4	$2-4\cdot2=$ $=-6$ │ 1	$\frac{2-4\cdot3}{-6}=\frac{5}{3}$	$\frac{1-4\cdot1}{-6}=\frac{1}{2}$
1	$2-1\cdot2=0$	$1-1\cdot3=-3$ │ 1	$\frac{1-1\cdot1-0\cdot\frac{1}{2}}{-2}=0$
-3	$1-(-3)\cdot2=$ $=7$	$1-(-3)\cdot3-7\times$ $\times\frac{5}{3}=-\frac{5}{3}$	$2-(-3\cdot1)-7\times$ $\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ │ 1

Таким образом, матрица A представлена в виде произведения

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 7 & -\frac{5}{3} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

На стр. 156 было указано правило преобразования матрицы в произведение двух треугольных для случая, когда $c_{ii}=1$. Выведите аналогичное правило для рассматриваемого случая, когда в матрице B диагональные элементы $b_{ii}=1$.

Задача 6,10. Полагая, что в формуле (6,10) элементы $b_{ii}=1$, представить указанные матрицы в виде произведения двух треугольных матриц:

$$1)\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix};\quad 2)\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ответ:

$$1)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 0\\ 3 & -16 & -\frac{34}{5} & 0\\ 1 & -4 & -\frac{16}{5} & \frac{99}{17}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 4 & 5 & 7\\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{66}{17}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$2)\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -7 & 0\\ 1 & -1 & 5 & -\frac{1}{7}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 6 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{7}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Замечание. Во всех предыдущих вычислениях мы представляли матрицу в виде произведения двух треугольных: первый сомножитель был нижней, а второй — верхней треугольной матрицей. Однако такой порядок сомножителей не является обязательным и матрицу можно разложить на произведение двух треугольных матриц так, чтобы первый сомножитель был верхней, а второй — нижней треугольной матрицей. Относящиеся к этому случаю формулы мы указывать не будем.

IV. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ ПРИ ПОМОЩИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЕЕ В ВИДЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

Задача 6,11. Доказать, что если матрица A представлена в виде произведения двух матриц C и B, т. е.

$$A = CB, \tag{1}$$

то матрица A^{-1}, обратная матрице A, определяется по формуле

$$A^{-1} = B^{-1}C^{-1}.$$

Доказательство. Обе части равенства (1) умножим слева на матрицу C^{-1}, обратную матрице C

$$C^{-1}A = C^{-1}CB, \tag{2}$$

но произведение $C^{-1}C$ есть единичная матрица E, т. е. $C^{-1}C = E$, а потому равенство (2) перепишется так:

$$C^{-1}A = EB = B, \tag{3}$$

так как произведение матрицы на единичную матрицу в любом порядке оставляет эту матрицу без изменения. Теперь обе части равенства (3) умножим слева на матрицу B^{-1}, обратную матрице B, и получим

$$B^{-1}C^{-1}A = B^{-1}B = E.$$

Таким образом, произведение матриц

$$B^{-1}C^{-1}A = E. \tag{4}$$

Перепишем (4) в виде

$$(B^{-1}C^{-1})\,A = E.$$

Усматривая, что произведение матриц $(B^{-1}C^{-1})$ и A есть единичная матрица E, заключаем, что матрица $B^{-1}C^{-1}$ является обратной для матрицы A, т. е. матрица $B^{-1}C^{-1}$ есть A^{-1}. Итак,

$$A^{-1} = B^{-1}C^{-1}, \tag{6,22}$$

что и требовалось доказать.

Заключение. Матрица, обратная произведению двух матриц, равна произведению обратных матриц сомножителей, взятых в обратном порядке.

Можно доказать, что и вообще, если матрица A равна произведению n матриц

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \ldots A_n,$$

то

$$A^{-1} = A_n^{-1} \ldots A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}$$

(доказательство проведите самостоятельно).

Читателю уже известно, что любая матрица A, удовлетворяющая условиям, указанным на стр. 151, может быть представлена в виде произведения двух треугольных матриц C и B, а обращение треугольной матрицы, как видно из предыдущего, не представляет больших затруднений (задачи 6,1—6,4).

Таким образом, для обращения матрицы A надо: 1) представить ее в виде произведения двух треугольных матриц C и B (нижней и верхней, или верхней и нижней), 2) определить матрицы, обратные этим треугольным, и 3) полученные в п. 2 матрицы перемножить в обратном порядке, т. е. если

$$A = CB,$$

то

$$A^{-1} = B^{-1}C^{-1}. \tag{6,22}$$

Формула (6,22) дает еще один способ получения обратной матрицы.

Итак, задачу определения обратной матрицы при помощи использования двух треугольных можно считать решенной. Однако можно найти матрицу, обратную данной, минуя определение матриц, обратных полученным треугольным.

V. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ ДАННОЙ БЕЗ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТРИЦ, ОБРАТНЫХ ТРЕУГОЛЬНЫМ

Покажем, что обращение матрицы можно произвести и без использования формулы (6,22), т. е. минуя определение матриц B^{-1} и C^{-1}, обратных тем треугольным, на которые разложена матрица A.

Из формулы (6,22) умножением ее обеих частей сначала слева на матрицу B, а потом справа на матрицу C получаем

$$BA^{-1} = BB^{-1}C^{-1}.$$

Но произведение BB^{-1} матрицы B на обратную ей матрицу B^{-1} есть единичная матрица E, потому

$$BA^{-1} = EC^{-1}, \tag{6,23}$$

а произведение EC^{-1} единичной матрицы E на матрицу C^{-1} оставляет эту последнюю без изменений: $EC^{-1} = C^{-1}$. Поэтому (6,23) перепишется так:

$$BA^{-1} = C^{-1}. \tag{6.24}$$

Аналогично легко показать, что

$$A^{-1}C = B^{-1}. \tag{6,25}$$

Введем такие обозначения:

1) элементы матрицы A будем обозначать через a_{ij}, а элементы ей обратной матрицы — через α_{ij};

2) элементы треугольных матриц B и C обозначим через b_{ij} и c_{ij} соответственно, а элементы им обратных матриц — через β_{ij} и γ_{ij}.

В развернутом виде формула (6,24) запишется так, причем мы рассмотрим только тот случай, когда диагональные элементы матрицы B равны 1 (см. задачу 6,8 и указание к ней);

$$BA^{-1} = C^{-1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & b_{23} & & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & b_{34} & \dots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{|B|} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}}_{|A^{-1}|} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \gamma_{n3} & & \dots & \gamma_{nn} \end{bmatrix}}_{|C^{-1}|}$$

Из этой формулы легко определятся те элементы α_{ij}, которые стоят в треугольнике над главной диагональю (для них первый индекс i меньше второго индекса $j : i < j$). Для этого надо использовать правило умножения матриц и условие равенства двух матриц. Например, умножая элементы первой строки матрицы B на соответствующие элементы второго столбца матрицы A^{-1}и приравнивая сумму произведений нулю — элементу γ_{12} в матрице C^{-1}, получим

$$\alpha_{12} + b_{12}\alpha_{22} + b_{13}\alpha_{32} + b_{14}\alpha_{42} + \dots + b_{1n}\alpha_{n2} = 0$$

или

$$\alpha_{12} + \sum_{k=2}^{n} b_{1k}\alpha_{k2} = 0,$$

откуда

$$\alpha_{12} = -\sum_{k=2}^{n} b_{1k}\alpha_{k2}.$$

Здесь нижний индекс суммирования $k = 2$ есть первый индекс 1 определяемого элемента α_{12}, сложенный с 1, т. е. $2 = 1 + 1$. Легко установить и общую формулу для определения элементов α_{ij} при $i < j$

$$\alpha_{ij} = -\sum_{k=i+1}^{n} b_{ik}\alpha_{kj}. \quad (i < j). \tag{6,26}$$

Для определения диагональных элементов α_{ii} и элементов α_{ij}, стоящих под главной диагональю $(i > j)$, воспользуемся формулой (6,25)

$$A^{-1}C = B^{-1}.$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}}_{|A^{-1}|} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}}_{|C|} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} & \beta_{13} & \dots & \beta_{1n} \\ 0 & 1 & \beta_{23} & \dots & \beta_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \beta_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{|B^{-1}|}.$$

Определяемые из этой формулы элементы стоят в треугольнике первого сомножителя. Напомним, что если диагональные элементы треугольной матрицы равны 1, то в обратной для нее матрице диагональные элементы также равны 1 — см. формулу (6,8).

Например, элемент α_{nn} определится из произведения элементов последней строки первого сомножителя на соответствующие элементы последнего столбца второго, если сумму этих произведений приравнять на основании условия равенства двух матриц элементу β_{nn} матрицы B^{-1}:

$$\alpha_{n1}\cdot 0+\alpha_{n2}\cdot 0+\cdots+\alpha_{nn}\cdot c_{nn}=\beta_{nn}=1;$$

$$\alpha_{nn}=\frac{\beta_{nn}}{c_{nn}}=\frac{1}{c_{nn}}.$$

Рассмотрим вычисление какого-либо другого диагонального элемента, например α_{33}:

$$\alpha_{31}\cdot 0+\alpha_{32}\cdot 0+\alpha_{33}\cdot c_{33}+\alpha_{34}\cdot c_{43}+\alpha_{35}c_{53}+\cdots+\alpha_{3n}c_{n3}=1;$$

$$\alpha_{33}=\frac{1}{c_{33}}\left[1-(\alpha_{34}c_{43}+\alpha_{35}c_{53}+\cdots+\alpha_{3n}c_{n3})\right];$$

$$\alpha_{33}=\frac{1}{c_{33}}\left[1-\sum_{k=4}^{n}\alpha_{3k}\cdot c_{k3}\right].$$

(здесь нижний индекс суммирования $4=3+1$, т. е. он равен индексу i определяемого элемента плюс 1) и вообще

$$\alpha_{ii}=\frac{1}{c_{ii}}\left[1-\sum_{k=i+1}^{n}\alpha_{ik}c_{ki}\right], \tag{6,27}$$

а элемент α_{ij}, стоящий под главной диагональю ($i>j$), находят, как легко проверить, по формуле

$$\alpha_{ij}=-\frac{\sum\limits_{k=j+1}^{n}\alpha_{ik}c_{kj}}{c_{jj}}\cdot(i>j) \tag{6,28}$$

Из формул (6,26) и (6,27) видно, что элементы α_{ij} обратной матрицы A^{-1} выражаются через элементы b_{ij} и c_{ij} тех треугольных матриц, в виде произведения которых представлена данная матрица A, а элементы матриц, обратных треугольным, определять нет надобности. Для удобства выпишем формулы (6,26), (6,27) и (6,28), по которым определяются элементы обратной матрицы:

$$\alpha_{ij}=-\sum_{k=i+1}^{n}b_{ik}\alpha_{kj};\ (i<j)$$

$$\alpha_{ii}=\frac{1}{c_{ii}}\left[1-\sum_{k=i+1}^{n}\alpha_{ik}c_{ki}\right];\ (i=j)$$

$$\alpha_{ij}=-\frac{\sum\limits_{k=j+1}^{n}\alpha_{ik}c_{kj}}{c_{jj}};\ (i>j).$$

В заключение укажем последовательность, в которой следует вести вычисление элементов α_{ij}, так как между ними существует зависимость, определяемая формулами (6,26) — (6,27), причем эту последовательность укажем применительно к матрице пятого порядка

$$\begin{array}{lccccc}
 & & \text{VIII} & \text{VI} & \text{IV} & \text{II}\\
\text{IX} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15}\\
\text{VII} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25}\\
\text{V} & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35}\\
\text{III} & \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45}\\
\text{I} & \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \alpha_{55}
\end{array}.$$

Из этой схемы видно, что сначала следует определить элементы последней строки, начиная с последнего α_{55}, а затем элементы последнего столбца, начиная тоже с последнего, затем — элементы предпоследней строки и предпоследнего столбца, опять-таки начиная с последнего и т. д. Стрелки и римские цифры, проставленные на этой схеме, указывают необходимую последовательность.

На практике обратную матрицу получают, пользуясь такой схемой:

1. Выписывают данную матрицу.

2. Под ней образуют две треугольные матрицы, произведение которых равно данной (см. предыдущие задачи).

3. Под этими матрицами по формулам (6,26) — (6,28) получают обратную матрицу данной, соблюдая последовательность определения элементов по указанной схеме.

Этот способ обращения матриц достаточно компактен и при использовании клавишных вычислительных машин не требует промежуточных записей вне таблиц, так как эти машины позволяют вести «умножение с накоплением». Ниже эта схема применяется при решении ряда примеров.

Задача 6,12. Обратить матрицу

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение

2	7	1	4	
5	2	0	-1	
3	4	2	1	$[a_{ij}]$
6	8	4	3	
2 1	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	
5	$-\frac{31}{2}$ 1	$\frac{5}{31}$	$\frac{22}{31}$	$[b_{ij}]$
3	$-\frac{13}{2}$	$\frac{48}{31}$ 1	$-\frac{1}{4}$	$[c_{ij}]$
6	-13	$\frac{96}{31}$	1 1	
$-\frac{1}{12}$	$\frac{5}{24}$	$-\frac{23}{24}$	$\frac{1}{2}$	
$\frac{5}{24}$	$-\frac{1}{48}$	$\frac{67}{48}$	$-\frac{3}{4}$	$[\alpha_{ij}]$
$-\frac{7}{24}$	$-\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{1}{4}$	
0	0	-2	1	

Ниже приведены подробные вычисления элементов α_{ij} обратной матрицы.

$$\alpha_{44} = \frac{1}{c_{44}} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$\alpha_{43} = -\frac{\alpha_{44}c_{43}}{c_{33}} = -\frac{1\cdot\frac{96}{31}}{\frac{48}{31}} = -2;$$

$$\alpha_{42} = -\frac{\sum\limits_{k=3}^{4}\alpha_{4k}\cdot c_{k2}}{c_{22}} = -\frac{\alpha_{43}c_{32}+\alpha_{44}c_{42}}{c_{22}} =$$

$$
= -\frac{-2\left(-\frac{13}{2}\right)+1\,(-13)}{\frac{31}{2}} = -\frac{13-13}{\frac{31}{2}} = 0;
$$

$$
\alpha_{41} = -\frac{\sum\limits_{k=2}^{4}\alpha_{4k}c_{k1}}{c_{11}} = -\frac{\alpha_{42}c_{21}+\alpha_{43}c_{31}+\alpha_{44}c_{41}}{c_{11}} =
$$

$$
= \frac{0\cdot 5+(-2)\cdot 3+1\cdot 6}{2} = 0;
$$

$$
\alpha_{34} = -b_{34}\cdot\alpha_{44} = -\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 1 = \frac{1}{4};
$$

$$
\alpha_{24} = -\sum_{k=3}^{4} b_{2k}\alpha_{k4} = -(b_{23}\alpha_{34}+b_{24}\alpha_{44}) =
$$

$$
= -\left(\frac{5}{31}\cdot\frac{1}{4}+\frac{22}{31}\cdot 1\right) = -\frac{93}{124} = -\frac{3}{4};
$$

$$
\alpha_{14} = -\sum_{k=2}^{4} b_{1k}\alpha_{k4} = -(b_{12}\alpha_{24}+b_{13}\alpha_{34}+b_{14}\alpha_{44}) =
$$

$$
= -\left[\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+2\cdot 1\right] = \frac{1}{2};
$$

$$
\alpha_{33} = \frac{1}{c_{33}}\left[1-\sum_{k=4}^{4}\alpha_{34}c_{43}\right] = \frac{1}{\frac{48}{31}}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot\frac{96}{31}\right) = \frac{7}{48};
$$

$$
\alpha_{32} = -\frac{\sum\limits_{k=3}^{4}\alpha_{3k}\cdot c_{k2}}{c_{22}} = -\frac{\alpha_{33}c_{32}+\alpha_{34}c_{42}}{c_{22}} =
$$

$$
= -\frac{\frac{7}{48}\left(-\frac{13}{2}\right)+\frac{1}{4}(-13)}{-\frac{31}{2}} = -\frac{13}{48};
$$

$$
\alpha_{31} = -\frac{\sum\limits_{k=2}^{4}\alpha_{3k}c_{k1}}{c_{11}} = -\frac{\alpha_{32}c_{21}+\alpha_{33}c_{31}+\alpha_{34}c_{41}}{c_{11}} =
$$

$$
= -\frac{-\frac{13}{48}\cdot 5+\frac{7}{48}\cdot 3+\frac{1}{4}\cdot 6}{2} = -\frac{7}{24};
$$

$$
\alpha_{23} = -\sum_{k=3}^{4} b_{2k}\alpha_{k3} = -(b_{23}\alpha_{33}+b_{24}\alpha_{43}) =
$$

$$
= -\left[\frac{5}{31}\cdot\frac{7}{48}+\frac{22}{31}(-2)\right] = \frac{67}{48};
$$

$$
\alpha_{13} = -\sum_{k=2}^{4} b_{1k}\alpha_{k3} = -(b_{12}\alpha_{23}+b_{13}\alpha_{33}+b_{14}\alpha_{43}) =
$$

$$
= -\left(\frac{7}{2}\cdot\frac{67}{48}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{48}+2\,(-2)\right) = -\frac{23}{24};
$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{c_{22}}\left[1 - \sum_{k=3}^{4} \alpha_{2k} c_{k2}\right] = \frac{1}{c_{22}}(1 - \alpha_{23}c_{32} - \alpha_{24}c_{42}) =$$
$$= -\frac{1}{\frac{31}{2}}\left[1 - \frac{67}{48}\cdot\left(-\frac{13}{2}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right)(-13)\right] = -\frac{1}{48};$$

$$\alpha_{21} = \frac{-\sum\limits_{k=2}^{4} \alpha_{2k} c_{k1}}{c_{11}} = -\frac{\alpha_{22}c_{21} + \alpha_{23}c_{31} + \alpha_{24}c_{41}}{c_{11}} =$$
$$= -\frac{-\frac{1}{48}\cdot 5 + \frac{67}{48}\cdot 3 + \left(-\frac{3}{4}\right)6}{2} = \frac{5}{24};$$

$$\alpha_{12} = -\sum_{k=2}^{4} b_{1k}\alpha_{k2} = -(b_{12}\alpha_{22} + b_{13}\alpha_{32} + b_{14}\alpha_{42}) =$$
$$= -\left[\frac{7}{2}\left(-\frac{1}{48}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{13}{48}\right) + 2\cdot 0\right] = \frac{5}{24};$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{c_{11}}\left[1 - \sum_{k=2}^{4} \alpha_{1k}c_{k1}\right] = \frac{1}{c_{11}}[1 - \alpha_{12}c_{21} - \alpha_{13}c_{31} - \alpha_{14}c_{41}] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{5}{24}\cdot 5 - \left(-\frac{23}{24}\right)\cdot 3 - \frac{1}{2}\cdot 6\right] = -\frac{1}{12}.$$

Итак, обратная матрица

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{12} & \frac{5}{24} & -\frac{23}{24} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{24} & -\frac{1}{48} & \frac{67}{48} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{7}{24} & -\frac{13}{48} & \frac{7}{48} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{48}\begin{bmatrix} -4 & 10 & -46 & 24 \\ 10 & -1 & 67 & -36 \\ -14 & -13 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & -96 & 48 \end{bmatrix}.$$

Проверка. Должно быть $A^{-1}\cdot A = E$. Действительно,

$$\frac{1}{48}\begin{bmatrix} -4 & 10 & -46 & 24 \\ 10 & -1 & 67 & -36 \\ -14 & -13 & 7 & 12 \\ 0 & 9 & -96 & 48 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 48 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Повторяем, что все вычисления были выполнены в простых дробях для более простой проверки произведенных действий. На практике вычисления обыкновенно ведутся в десятичных дробях, но вносимые округления влекут за собой неизбежные погрешности.

Задача 6,13 (для самостоятельного решения). Пользуясь формулами (6,26) — (6,28) и указанной схемой получения обратной матрицы, обратить следующие матрицы:

$$1)\ A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 5 \end{bmatrix};\quad 2)\ A=\begin{bmatrix} 0{,}888 & 1{,}059 & 0{,}667 \\ 1{,}059 & 1{,}512 & 1{,}031 \\ 0{,}667 & 1{,}031 & 0{,}837 \end{bmatrix}.$$

Вычисления производить в десятичных дробях с помощью арифмометра или клавишной вычислительной машины. Полученные результаты проверить: произведение $A^{-1}\cdot A$ должно быть равно единичной матрице

$$A^{-1}\cdot A=E.$$

Ответ. 1) Для контроля

$$C=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1{,}5 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -15 & 0 \\ 3 & -0{,}5 & -9 & 2{,}4667 \end{bmatrix};$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 1{,}5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1{,}3333 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}6889 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -0{,}0538 & -0{,}1168 & +0{,}4414 & -0{,}1804 \\ +0{,}4052 & -0{,}2884 & -0{,}1441 & 0{,}0181 \\ -0{,}2163 & +0{,}5314 & -0{,}2342 & 0{,}2793 \\ -0{,}3784 & +0{,}5134 & -0{,}2432 & 0{,}4054 \end{bmatrix};$$

2)

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 8{,}08977 & -7{,}93495 & 3{,}32745 \\ -7{,}93495 & 11{,}91472 & -8{,}35304 \\ 3{,}32745 & -8{,}35304 & 8{,}83220 \end{bmatrix}.$$

Содержание. Матричная запись системы линейных алгебраических уравнений. Численное решение линейных алгебраических уравнений способом исключения.

СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет такой вид:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = d_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = d_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = d_3; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = d_n. \end{array}\right\} \qquad (7,1)$$

Мы будем рассматривать только такие системы линейных алгебраических уравнений, у которых число уравнений равно числу неизвестных. В системе уравнений (7,1) неизвестными являются $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, а коэффициенты a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, \ldots n)$ при неизвестных и свободные члены d_i $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$ — действительные числа.

Составим матрицу A из коэффициентов a_{ij} при неизвестных

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

матрицу-столбец x из неизвестных

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

и матрицу-столбец d из свободных членов

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}.$$

Учитывая правило умножения матриц и условие равенства двух матриц, систему (7,1) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \qquad (7,2)$$

или, учитывая введенные обозначения, всю систему уравнений (7,2) можно записать компактно в виде одного матричного уравнения

$$Ax = d. \qquad (7,3)$$

Такая запись большого числа линейных уравнений в виде одного уравнения является одним из достоинств матричных обозначений.

На предыдущем практическом занятии мы уделили большое внимание вычислению обратной матрицы. Покажем теперь применение этой операции для решения системы линейных алгебраических уравнений.

Если матрица A — неособенная, то она имеет обратную матрицу A^{-1}. Умножим слева обе части уравнения (7,3) на A^{-1} и, заметив, что $A^{-1} \cdot A = E$ — единичная матрица, получим столбец неизвестных x из равенства

$$x = A^{-1} d. \qquad (7,4)$$

В этой формуле x может быть не только матрицей-столбцом, но и матрицей размера $n \times m$. В этом случае и матрица d составленная из свободных членов, должна тоже иметь размер $n \times m$. Такой случай имеет место, например, в задаче (7,3).

Таким образом, нам стоит только определить элементы α_{ij} ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) обратной матрицы A^{-1}, и задачу определения неизвестных систем (7,1) можно считать решенной. Несколько таких упражнений мы выполним в начале этого практического занятия.

Но здесь же следует заметить, что в случае большого числа n неизвестных вычисление элементов обратной матрицы становится громоздким и затруднительным. Поэтому формула (7,4) имеет больше теоретическое значение, чем практическое, так как по сравнению с формулами Крамера для решения системы линейных алгебраических уравнений она никаких преимуществ в вычислениях не дает.

Эта формула оказывается безусловно полезной тогда, когда рассматриваются такие системы уравнений, у которых матрица коэффициентов при неизвестных одна и та же (такие системы уравнений встречаются, например, в строительной механике). Вычисление обратной матрицы в таком случае приносит большую экономию в вычислительной работе (см., например, задачу (7,3).

Это практическое занятие проведем в таком порядке: сначала будем решать системы уравнений с небольшим числом неизвестных (два, три) по формуле (7,4) (задачи 7,1—7,7), а потом укажем удобную компактную схему решения системы (7,1) методом исключения (алгоритм Гаусса), которому дадим матричную трактовку. Теория этого метода, формулы, сюда относящиеся и схема его применения указаны после задачи 7,7.

Задача 7,1. Записать систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 9; \\ 3x_1 - 4x_2 &= 5 \end{aligned}\right\}$$

в виде одного матричного уравнения и решить ее по формуле (7,4).

Решение. Систему представим в виде

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Здесь матрица

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Найдем обратную ей матрицу по формуле (5,2), которая в развернутом виде выглядит так:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \tag{7,5}$$

где $|A|$ — определитель матрицы A, а элементы A_{ij} — алгебраические дополнения ее элементов a_{ij}, причем матрица в правой части формулы (7,5) есть союзная матрица $\tilde{A}$ для A. Но здесь еще раз подчеркнем, что когда $n > 3$, то формулой (7,5) для обращения матрицы обыкновенно не пользуются, а применяют методы, рассмотренные на пятом и шестом практических занятиях.

Воспользуемся формулой (5,2) для определения обратной матрицы

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -17;$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-4) = -4; \; A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3; \; A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (2) = 2.$$

Составим матрицу, союзную матрице A

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix},$$

и поэтому по формуле (5,2)

$$A^{-1}=\frac{1}{-17}\begin{bmatrix}-4 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{17} & \frac{3}{17}\\ \frac{3}{17} & -\frac{2}{17}\end{bmatrix}.$$

Теперь по формуле (7,4)

$$x=A^{-1}d.$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{17} & \frac{3}{17}\\ \frac{3}{17} & \frac{-2}{17}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}9\\ 5\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{51}{17}\\ \frac{17}{17}\end{bmatrix};$$

$$x_1=\frac{51}{17}=3;\quad x_2=\frac{17}{17}=1.$$

Задача 7,2 (для самостоятельного решения). Записать систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}5x_1+x_2&=7;\\ x_1-3x_2&=8\end{aligned}\right\}$$

в виде одного матричного уравнения и решить ее по формуле (7,4)

Указание. Обратная матрица по формуле (5,2)

$$A^{-1}=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & -5\end{bmatrix}.$$

Ответ. $x_1=\frac{29}{16};\quad x_2=-\frac{33}{16}.$

Задача 7,3. Решить системы уравнений:

$$1)\ \left.\begin{aligned}3x_1-2x_2&=2;\\ 4x_1-x_2&=1;\end{aligned}\right\}\qquad 2)\ \left.\begin{aligned}3x_3-2x_4&=3;\\ 4x_3-x_4&=4;\end{aligned}\right\}$$

$$3)\ \left.\begin{aligned}3x_5-2x_6&=5;\\ 4x_5-x_6&=7.\end{aligned}\right\}$$

Решение. Матрица A коэффициентов при неизвестных во всех трех системах одна и та же:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{bmatrix}.$$

Это тот случай, когда применение формулы (7,4) является выгодным, т. е. выгодно решить все три системы путем отыскания обратной матрицы A^{-1} для матрицы A. Запищем все три системы в виде одного матричного уравнения

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_3 & x_5 \\ x_2 & x_4 & x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

(отметим, что матрица, составленная из неизвестных, должна иметь тот же размер, что и матрица, составленная из свободных членов). Легко видеть, что для матрицы A обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix},$$

а потому по формуле (7,4)

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_3 & x_5 \\ x_2 & x_4 & x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Выполняя умножения в правой части равенства, получим

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_3 & x_5 \\ x_2 & x_4 & x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{9}{5} \\ -1 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

откуда

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -1.$$
$$x_3 = 1; \quad x_4 = 0.$$
$$x_5 = \frac{9}{5}; \quad x_6 = \frac{1}{5}.$$

Решение этих трех систем уравнений по формуле (7,4) путем отыскания обратной матрицы потребовало значительно меньше труда, чем решение их по известным читателю формулам Крамера.

Задача 7,4 (для самостоятельного решения). Решить системы уравнений:

$$1)\ \left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 7; \\ 3x_1 - 2x_2 &= 1; \end{aligned}\right\} \qquad 2)\ \left.\begin{aligned} 2x_3 + 3x_4 &= 1; \\ 3x_3 - 2x_4 &= 0; \end{aligned}\right\}$$

$$3)\ \left.\begin{aligned} 2x_5 + 3x_6 &= 9; \\ 3x_5 - 2x_6 &= 3; \end{aligned}\right\} \qquad 4)\ \left.\begin{aligned} 2x_7 + 3x_8 &= 1; \\ 3x_7 - 2x_8 &= 3. \end{aligned}\right\}$$

Указание. В матричной записи все четыре системы запишутся так (проверьте, используя правило умножения матриц и условие их равенства):

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_3 & x_5 & x_7 \\ x_2 & x_4 & x_6 & x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Для матрицы

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & -2\end{bmatrix}$$

обратная матрица

$$A^{-1}=-\frac{1}{13}\begin{bmatrix}-2 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{13} & \frac{3}{13}\\ \frac{3}{13} & -\frac{2}{13}\end{bmatrix}.$$

Ответ.

$$x_1=\frac{17}{13};\qquad x_2=\frac{19}{13};$$
$$x_3=\frac{2}{13};\qquad x_4=\frac{3}{13};$$
$$x_5=\frac{27}{13};\qquad x_6=\frac{21}{13};$$
$$x_7=\frac{11}{13};\qquad x_8=-\frac{3}{13}.$$

Задача 7,5. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}2x+y-2z&=5;\\ 3x-2y+3z&=4;\\ 2x-3y+5z&=1,\end{aligned}\right\}$$

пользуясь формулой (7,4).

Решение. Запишем систему в виде одного матричного уравнения

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 3\\ 2 & -3 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 4\\ 1\end{bmatrix}.$$

Здесь матрица коэффициентов

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 3\\ 2 & -3 & 5\end{bmatrix},$$

а неизвестные x, y и z найдутся из формулы

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}5\\ 4\\ 1\end{bmatrix}. \qquad \text{(a)}$$

Обратим матрицу A, для чего применим формулу (5,7)

$$A=\left[\begin{array}{cc|c}2 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 3\\ \hline 2 & -3 & 5\end{array}\right].$$

Здесь

$$\alpha_{11}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}; \quad \alpha_{12}=\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \alpha_{21}=\begin{bmatrix} 2; & 3 \end{bmatrix} \quad \alpha_{22}=5.$$

1) α_{11}^{-1} находим непосредственно

$$\alpha_{11}^{-1}=-\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix};$$

2) $$\beta=\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}=5-\begin{bmatrix} 2; & -3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}=$$

$$=5-\begin{bmatrix} -\frac{5}{7}; & \frac{8}{7} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}=5-\left(+\frac{34}{7}\right)=\frac{1}{7}.$$

Итак, $\beta=\frac{1}{7}; \quad \beta^{-1}=7.$

3) $\gamma=\beta^{-1}\alpha_{21}=7[2;\ -3]=[14;\ -21].$

4) $$\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\gamma\alpha_{11}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}\cdot[14;\ -21]\cdot\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ -\frac{12}{7} \end{bmatrix}\cdot[14;\ -21]\cdot\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -24 & 36 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{8}{7} \\ \frac{60}{7} & -\frac{96}{7} \end{bmatrix};$$

5) $$\alpha_{11}^{-1}+\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\gamma\alpha_{11}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{8}{7} \\ \frac{60}{7} & -\frac{96}{7} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 9 & -14 \end{bmatrix};$$

6) $$-\gamma\alpha_{11}^{-1}=-[14;\ -21]\cdot\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}=-[-5;\ 8]=[5;\ -8];$$

7) $$-\alpha_{11}\alpha_{12}\beta^{-1}=-\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}\cdot 7=-\begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{12}{7} \end{bmatrix}\cdot 7=\begin{bmatrix} 1 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Теперь все элементы обратной матрицы известны и по формуле (5,7)

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & -14 & 12 \\ 5 & -8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что вычисление по формуле (5,2) оказалось бы менее громоздким. Следовало бы вычислить 9 определителей второго, один определитель третьего порядка и образовать союзную матрицу $\tilde{A}$.

Подставляя матрицу A^{-1} в формулу (а), получим

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & -14 & 12 \\ 5 & -8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

откуда

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

т. е. $x = 2$; $y = 1$; $z = 0$.

Задача 7,6. Решить системы уравнений

$$1)\ \left.\begin{aligned} 4x_1 + 5x_3 &= 7; \\ x_2 - 6x_3 &= 11; \\ 3x_1 + 4x_3 &= -2; \end{aligned}\right\} \qquad 2)\ \left.\begin{aligned} 4x_4 + 5x_6 &= 1; \\ x_5 - 6x_6 &= 2; \\ 3x_4 + 4x_6 &= 11; \end{aligned}\right\}$$

$$3)\ \left.\begin{aligned} 4x_7 + 5x_9 &= 0; \\ x_8 - 6x_9 &= 5; \\ 3x_7 + 4x_9 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Запишем все три системы в виде одного матричного уравнения

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 11 & 2 & 5 \\ -2 & 11 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из этого следует, что матрица неизвестных

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 11 & 2 & 5 \\ -2 & 11 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(а)}$$

где A^{-1} — обратная матрица для матрицы коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Найдем для этой матрицы обратную. В данном случае, учитывая характер этой матрицы, удобнее воспользоваться общей формулой (5,2) для определения обратной матрицы. Определитель матрицы A

$$|A| = 1.$$

Алгебраические дополнения

$$A_{11}=4; \qquad A_{12}=-18; \qquad A_{13}=-3;$$
$$A_{21}=0; \qquad A_{22}=1; \qquad A_{23}=0;$$
$$A_{31}=-5; \qquad A_{32}=24; \qquad A_{33}=4.$$

Составляем матрицу из алгебраических дополнений

$$\begin{bmatrix} 4 & -18 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 24 & 4 \end{bmatrix},$$

транспонируем ее, чтобы получить союзную матрицу $\tilde{A}$ и делим на $|A|=1$. Учитывая, что на основании формулы (5,2)

$$A^{-1}=\frac{\tilde{A}}{|A|},$$

получаем

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Из равенства (а) следует, что

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 11 & 2 & 5 \\ -2 & 11 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда, выполняя умножение матриц в правой части, получаем

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 38 & -51 & -5 \\ -163 & 248 & 29 \\ -29 & 41 & 4 \end{bmatrix}.$$

Учитывая условия равенства матриц, находим

$$x_1=38; \qquad x_2=-163; \qquad x_3=-29;$$
$$x_4=-51; \qquad x_5=248; \qquad x_6=41;$$
$$x_7=-5; \qquad x_8=29; \qquad x_9=4.$$

Отметим безусловную выгоду, которую мы извлекли, применяя в данном случае определение обратной матрицы и используя формулу (7,4). Если бы эти системы решать по формулам Крамера, то пришлось бы вычислять 10 определителей третьего порядка. Однако подчеркнем, что экономия в вычислениях получилась вследствие того, что матрица коэффициентов во всех трех системах была одной и той же.

Задача 7,7 (для самостоятельного решения). Решить системы уравнений, применяя метод, указанный в предыдущей задаче:

$$1)\ \left.\begin{aligned} 2x_1+y_1+z_1&=11;\\ x_1\qquad+2z_1&=15;\\ 3x_1+y_1+2z_1&=14; \end{aligned}\right\}\qquad 2)\ \left.\begin{aligned} 2x_2+y_2+z_2&=2;\\ x_2\qquad+2z_2&=1;\\ 3x_2+y_2+2z_2&=-4; \end{aligned}\right\}$$

$$3)\ \left.\begin{aligned} 2x_3+y_3+z_3&=-3;\\ x_3\qquad+2z_3&=1;\\ 3x_3+y_3+2z_3&=5; \end{aligned}\right\}\qquad 4)\ \left.\begin{aligned} 2x_4+y_4+z_4&=0;\\ x_4\qquad+2z_4&=-1;\\ 3x_4+y_4+2z_4&=12. \end{aligned}\right\}$$

Указание. Все четыре системы представить в виде одного матричного уравнения

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4\\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 11 & 2 & -3 & 0\\ 15 & 1 & 1 & -1\\ 14 & -4 & 5 & 12 \end{bmatrix}.$$

Для контроля

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ответ.

$$\begin{aligned} &x_1=-9; && y_1=17; && z_1=12;\\ &x_2=-13; && y_2=21; && z_2=7;\\ &x_3=15; && y_3=-26; && z_3=-7;\\ &x_4=25; && y_4=-37; && z_4=-13;. \end{aligned}$$

Задача 7,8 (для самостоятельного решения). Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3x_1-2x_2\qquad\quad-x_4&=1;\\ 2x_2+2x_3+x_4&=1;\\ x_1-2x_2-3x_3-2x_4&=1;\\ x_2+2x_3+x_4&=1. \end{aligned}\right\}$$

Указание. Обратная матрица коэффициентов

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 3 & 6\\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix}.$$

Ответ. $x_1=-4$; $x_2=0$; $x_3=7$; $x_4=-13$.

Теперь приступим ко второй части упражнений этого практического занятия.

Из большого числа известных методов решения систем линейных алгебраических уравнений мы будем пользоваться только одним из наиболее распространенных методов — методом исключения, который обычно называется методом Гаусса (с другими методами читатель может ознакомиться по книге: Д. К. Фаддеев и В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, 1960).

Метод Гаусса в матричном виде позволяет указать удобную для практики компактную схему решения, которая сводится к представлению матрицы коэффициентов в виде произведения двух треугольных матриц, а эту задачу мы уже подробно разобрали на предыдущем практическом занятии.

В матричном виде система линейных алгебраических (7,1) записывается так (7,3):

$$Ax = d,$$

где A — матрица коэффициентов системы (7,1).

Представим матрицу A в виде произведения нижней треугольной матрицы C на верхнюю треугольную матрицу B, причем интересующие нас формулы выведем применительно к случаю, когда диагональные элементы матрицы B равны 1.

$$A = CB.$$

Тогда уравнение (7,3) запишется в виде

$$CBx = d. \tag{7,6}$$

Произведение Bx матрицы B на x — матрицу-столбец неизвестных, — будет матрицей-столбцом, который мы обозначим через y

$$Bx = y. \tag{7,7}$$

Уравнение (7,6) перепишется в виде

$$Cy = d. \tag{7,8}$$

После того как из уравнения (7,8) будет определена матрица-столбец y, из уравнения (7,7), в котором, таким образом, правая часть окажется известной, можно определить матрицу-столбец x, чем и закончится решение задачи.

Распишем подробно уравнение (7,8), учитывая, что C — нижняя треугольная матрица:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & c_{n4} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}. \tag{7,9}$$

Здесь элементы c_{ij} ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) известны, так как матрица A коэффициентов при неизвестных считается уже разложенной на произведение двух треугольных матриц C и B.

Перемножив матрицы в левой части (7,9) с учетом условия равенства двух матриц, получаем такие уравнения для определения неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$\left.\begin{array}{r}
c_{11}y_1 = d_1; \\
c_{21}y_1 + c_{22}y_2 = d_2; \\
c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3 = d_3; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_{k,1}y_1 + \cdots + c_{k,k-2}y_{k-2} + c_{k,k-1}y_{k-1} + c_{kk}y_k = d_k; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + c_{n3}y_3 + \cdots + c_{nn}y_n = d_n.
\end{array}\right\} \quad (7,10)$$

Из этой системы уравнений, начиная с первого, получаем значения неизвестных y_i:

из 1-го уравнения $y_1 = \frac{d_1}{c_{11}}$;

из 2-го уравнения $y_2 = \frac{d_2 - c_{21}y_1}{c_{22}}$;

из 3-го уравнения $y_3 = \frac{d_3 - c_{31}y_1 - c_{32}y_2}{c_{33}}$;

из k-го уравнения

$$y_k = \frac{d_k - c_{k1}y_1 - c_{k2}y_2 - c_{k3}y_3 - \cdots - c_{k,k-1}y_{k-1}}{c_{kk}}$$

и, наконец, из n-ого уравнения

$$y_n = \frac{d_n - c_{n1}y_1 - c_{n2}y_2 - c_{n3}y_3 - \cdots - c_{n,n-1}y_{n-1}}{c_{nn}}.$$

Все эти формулы можно объединить в одну

$$y_i = \frac{d_i - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik}y_k}{c_{ii}}. \quad (7,11)$$

После того как все y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) определены по формуле (7,11), их надо подставить в уравнение (7,7), в котором все элементы b_{ij} ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) верхней треугольной матрицы B уже известны, так как, повторяем еще раз, что матрица A представлена как произведение двух треугольных матриц.

В развернутом виде уравнение (7,7) запишется так:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\ b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (7,12)$$

Все диагональные элементы матрицы B равны 1. Умножив матрицы в левой части уравнения, получим матрицу-столбец, а учитывая условие равенства двух матриц, будем иметь такую систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \cdots + b_{1n}x_n &= y_1; \\ x_2 + b_{23}x_3 + \cdots + b_{2n}x_n &= y_2; \\ x_3 + \cdots + b_{3n}x_n &= y_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} + b_{n-1,n}x_n &= y_{n-1}; \\ x_n &= y_n. \end{aligned}\right\} \quad (7,13)$$

Начиная решение этой системы уравнений с последнего, получим

$$\begin{aligned} x_n &= y_n \\ x_{n-1} &= y_{n-1} - b_{n-1,n}x_n; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_3 &= y_3 - b_{34}x_4 - b_{35}x_5 - \cdots - b_{3n}x_n; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 &= y_1 - b_{12}x_2 - b_{13}x_3 - \cdots - b_{1n}x_n. \end{aligned}$$

Общая формула для определения x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) запишется так:

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} b_{ik}x_k. \quad (7,14)$$

Для удобства напишем рядом формулы (7,11) и (7,14)

$$y_i = \frac{d_i - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik}y_k}{c_{ii}};$$

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} b_{ik}x_k.$$

По формуле (7,11) элементы y_i находятся так же, как и элементы b_{ij} ($i < j$) верхней треугольной матрицы по формулам (6,21). Ниже приводится так называемая компактная вычислительная схема для применения метода Гаусса решения линейных систем алгебраических уравнений (табл. 1).

Таблица 1 указывает компактную схему решения системы линейных алгебраических уравнений. Приведенный аппарат формул для решения системы линейных алгебраических уравнений по способу Гаусса приводит к такому простому правилу:

1. Заготавливаются схемы, аналогичные схеме на стр. 187.

2. Вычисления ведутся в такой же последовательности, как и в схеме на стр. 155: сначала определяются элементы столбцов, а потом элементы строк, т. е. элементы первого столбца, элементы первой строки; элементы второго столбца, а потом элементы второй строки; элементы третьего столбца, а потом элементы третьей строки и т. д.

3. Чтобы получить элементы, расположенные на главной диагонали или ниже ее, берется соответствующий элемент матрицы A и из него вычитается сумма произведений элементов, расположенных в той же строке и в том же столбце, что и вычисляемый элемент, причем произведения берутся так, что умножается первый элемент в строке на первый элемент в столбце, второй в строке — на второй в столбце и т. д.

4. Чтобы получить элемент, стоящий над главной диагональю, поступают так же, как указано в п. 3, но полученное от вычитания число надо еще разделить на диагональный элемент той же строки, в которой стоит вычисляемый элемент.

5. Искомые неизвестные вычисляются в таком порядке:

$$x_4,\ x_3,\ x_2,\ x_1,$$

т. е. так называемым «обратным ходом» по формуле (7,14)

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} b_{ik} x_k.$$

Если вычисления ведутся с помощью арифмометра или клавишной машины, то элементы в табл. 1 получаются без каких бы то ни было промежуточных записей.

Все вычисления должны быть проконтролированы. Контроль осуществляется так: для него отводится последний столбец и последняя строка вычислительной схемы. Последний столбец делится на две части: верхнюю и нижнюю (см. табл. 1). Элемент верхнего столбца, который мы обозначим через f_i, равен сумме элементов, стоящих с ним в одной и той же строке,

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + d_i,$$

Таблица 1

КОМПАКТНАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА ПРИМЕНЕНИЯ СПОСОБА ГАУССА

x_1	x_2	x_3	x_4	d_i	Контрольный столбец f_i и k_i
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	d_1	$f_1=a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+d_1$
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	d_2	$f_2=a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}+d_2$
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	d_3	$f_3=a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}+d_3$
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	d_4	$f_4=a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{44}+d_4$
$c_{11}=a_{11}$ 1	$b_{12}=\dfrac{a_{12}}{a_{11}}$	$b_{13}=\dfrac{a_{13}}{a_{11}}$	$b_{14}=\dfrac{a_{14}}{a_{11}}$	$y_1=\dfrac{d_1}{a_{11}}$	$k_1=\dfrac{f_1}{a_{11}}$
$c_{21}=a_{21}$	$c_{22}=a_{22}-a_{21}b_{12}$ 1	$b_{23}=\dfrac{a_{23}-c_{21}b_{13}}{c_{22}}$	$b_{24}=\dfrac{a_{24}-c_{21}b_{14}}{c_{22}}$	$y_2=\dfrac{d_2-c_{21}y_1}{c_{22}}$	$k_2=\dfrac{f_2-c_{21}k_1}{c_{22}}$
$c_{31}=a_{31}$	$c_{32}=a_{32}-a_{31}b_{12}$	$c_{33}=a_{33}-c_{31}b_{13}-c_{32}b_{23}$ 1	$b_{34}=\dfrac{a_{34}-c_{31}b_{14}-c_{32}b_{24}}{c_{33}}$	$y_3=\dfrac{d_3-c_{31}y_1-c_{32}y_2}{c_{33}}$	$k_3=\dfrac{f_3-c_{31}k_1-c_{32}k_2}{c_{33}}$
$c_{41}=a_{41}$	$c_{42}=a_{42}-a_{41}b_{12}$	$c_{43}=a_{43}-c_{41}b_{13}-c_{42}b_{23}$	$c_{44}=a_{44}-c_{41}b_{14}-c_{42}b_{24}-c_{43}b_{34}$ 1	$y_4=\dfrac{d_4-c_{41}y_1-c_{42}y_2-c_{43}y_3}{c_{44}}$	$k_4=\dfrac{f_4-c_{41}k_1-c_{42}k_2-c_{43}k_3}{c_{44}}$
$x_1=y_1-b_{12}x_2-b_{13}x_3-b_{14}x_4$	$x_2=y_2-b_{23}x_3-b_{24}x_4$	$x_3=y_3-b_{34}x_4$	$x_4=y_4$		

Элементы же нижнего контрольного, которые мы обозначим через k_i, получаются, как и элементы верхней треугольной матрицы, т. е. по формуле

$$k_i = \frac{f_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} k_j}{c_{ii}}.$$

Контроль состоит в том, что элементы контрольного столбца должны быть равны сумме элементов, стоящих в той же строке над главной диагональю. Например, в схеме элементы контрольного столбца должны быть равны:

$$k_2 = 1 + b_{23} + b_{24} + y_2;$$
$$k_3 = 1 + b_{34} + y_3;$$
$$k_4 = y_4.$$

Контроль должен осуществляться после вычисления каждой строки.

Таблица 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	d_i	f_i и k_i	
	3	2	-1	5	-8	1	f_i
	1	1	-1	1	-4	-2	
	1	-1	1	2	0	3	
	2	-3	-1	3	-15	-14	
c_{ij}	3 ‖ 1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$	k_i
	1	$\frac{1}{3}$ ‖ 1	-2	-2	-4	-7	
	1	$-\frac{5}{3}$	-2 ‖ 1	$+\frac{3}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	
	2	$-\frac{13}{3}$	-9	$+\frac{9}{2}$ ‖ 1	-2	-1	
	1	2	5	-2	↑ y_i		
	↑ x_1	↑ x_2	↑ x_3	↑ x_4			

Задача 7,9. Решить по способу Гаусса систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+2x_2-x_3+5x_4&=-8;\\ x_1+x_2-x_3+x_4&=-4;\\ x_1-x_2+x_3+2x_4&=0;\\ 2x_1-3x_2-x_3+3x_4&=-15. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Используя указанный аппарат формул (7,11) и (7,14), с также схему, приведенную в табл. 1 на стр. 187, располагаем все вычисления, как указано в табл. 2, стр. 188. (Вычисления проведены в простых дробях для упрощения проверки по ходу решения. Дальнейшие задачи решаются в десятичных дробях).

Задача 7,10. Решить по способу Гаусса систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2-3x_3+5x_4&=18{,}9012;\\ x_1-x_2+x_3-3x_4&=14{,}0800;\\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4&=-2{,}2954;\\ 5x_1+2x_2-3x_3+x_4&=-6{,}3764. \end{aligned}\right\}$$

Таблица 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	d_i	f_i и k_i
	2	1	−3	5	18,9012	23,9012
	1	−1	1	−3	14,0800	12,0800
f_i	3	1	−1	2	−2,2954	2,7046
	5	2	−3	1	−6,3764	−1,3764 f_i ↑
	2 1	0,5000	−1,5000	2,5000	9,4506	11,9506
	1	−1,5000 1	−1,6667	3,6667	−3,0863	−0,0863
c_{ij}	3	−0,5000	2,6667 1	−1,3750	−12,0717	−12,4467
	5	−0,5000	3,6667	−4,6251 1	2,3590	3,3590
	3,5359	−26,4498	−8,8281	2,3590		
	↑ x_1	↑ x_2	↑ x_3	↑ x_4	↑ y_i	↑ k_i

Решение. Для решения используем компактную схему, приведенную на стр. 187, в которой как уже указывалось, использованы формулы (7,11) и (7,14). Последний столбец отведен для контроля. Читатель должен проделать все вычисления с помощью арифмометра или настольной клавишной вычислительной машины. Все вычисления помещены в табл. 3. на стр. 189.

Задача 7,11 (для самостоятельного решения). Решить систему уравнений

$$\begin{aligned}
0{,}8320x_1 + 0{,}4670x_2 + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + 0{,}0155x_5 &= 0;\\
0{,}4670x_1 + 1{,}5160x_2 + 0{,}0467x_3 + \quad 0 \quad + 0{,}0294x_5 &= -0{,}302;\\
0{,}0155x_1 + 0{,}0294x_2 + 0{,}0561x_3 + 0{,}0561x_4 + 0{,}0283x_5 &= -0{,}634;\\
0 \quad + 0{,}4670x_2 + 1{,}7850x_3 + 0{,}5120x_4 + 0{,}0561x_5 &= -1{,}163;\\
0 \quad + \quad 0 \quad + 0{,}5120x_3 + 1{,}4720x_4 + 0{,}0561x_5 &= -1{,}977.
\end{aligned}$$

Ответ. $x_1 = 0{,}378$; $x_2 = 0{,}0485$; $x_3 = 0{,}184$; $x_4 = -0{,}580$; $x_5 = -21{,}7$.

Задача 7,12 (для самостоятельного решения). Решить систему уравнений

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 3;\\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 9;\\
2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= -16;\\
3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 &= 2;\\
-x_1 + x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= -12.
\end{aligned}$$

Ответ. $x_1 = 1$: $x_2 = -1$; $x_3 = 2$; $x_4 = -2$; $x_5 = 3$.

Задача 7,13 (для самостоятельного решения). Решить систему уравнений

$$\begin{aligned}
10x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= -20;\\
2x_1 + 20x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 &= 15;\\
3x_1 - 2x_2 + 25x_3 + x_4 - 2x_5 &= -20;\\
-x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + 2x_5 &= -40;\\
2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 50x_5 &= -75.
\end{aligned}$$

Ответ. $x_1 = -2{,}411$; $x_2 = 1{,}439$; $x_3 = -0{,}633$: $x_4 = 3{,}664$; $x_5 = -1{,}130$.

Задача 7,14 (для самостоятельного решения). Решить систему уравнений

$$\begin{aligned}
0{,}5x_1 + \quad 0 \quad + \quad x_3 + 1{,}023x_4 &= 4{,}725;\\
1{,}5x_1 + \quad x_2 + \quad 0 \quad + 3{,}702x_4 &= 3{,}402;\\
1{,}273x_1 - 2{,}752x_2 + 3{,}208x_3 - 1{,}305x_4 &= 2{,}709;\\
2x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 + 4{,}007x_4 &= 1{,}231.
\end{aligned}$$

Ответ. $x_1 = -14{,}980$; $x_2 = -9{,}682$; $x_3 = 2{,}390$; $x_4 = 9{,}604$.

Содержание. Характеристическое уравнение матрицы. След матрицы. Характеристические числа и собственные векторы матрицы. Нормирование вектора. Скалярное произведение двух векторов. Ортогональные векторы. Ортогональные матрицы. Преобразование характеристического уравнения методом Леверье.

СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Характеристическое уравнение. Пусть матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots a_{3n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (8,1)$$

а вектор-столбец

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}. \qquad (8,2)$$

Умножим матрицу A на вектор x. Произведение будет вектором-столбцом, элементы которого обозначим через y_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$). Если окажется, что элементы y_i этого вектора-столбца пропорциональны соответствующим элементам вектора-столбца x с коэффициентом пропорциональности λ, т. е. если

$$y_i = \lambda x_i \quad (i = 1, 2 \ldots, n),$$

то вектор-столбец x называется собственным вектором матрицы A, а коэффициент пропорциональности λ характеристическим числом матрицы A, или ее собственным значением.

Таким образом, вектор x называется собственным вектором матрицы A, а число λ — ее характеристическим числом, или ее собственным значением, если выполняется равенство

$$Ax = \lambda x. \tag{8,3}$$

Перепишем это уравнение в виде

$$Ax - \lambda x = 0$$

или

$$(A - \lambda E)x = 0, \tag{8,4}$$

где E — единичная матрица, порядок которой равен порядку матрицы A, а 0 — нулевой вектор-столбец, т. е. столбец, все элементы которого равны нулю. Без множителя E при λ уравнение (8,4) не имело бы смысла.

При условии, что вектор $x \neq 0$, равенство (8,4) возможно только тогда, когда определитель его левой части равен нулю, т. е.

$$|A - \lambda E| = 0. \tag{8,5}$$

Уравнение (8,5) называется характеристическим уравнением матрицы A, а его левая часть $A - \lambda E$ — характеристическим многочленом. Получим уравнение (8,5) в развернутом виде. Произведение

$$\lambda E = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots \lambda \end{bmatrix}.$$

Поэтому уравнение (8,5) на основании правила вычитания матриц с учетом равенства (8,1) в развернутом виде запишется так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \ldots a_{3n} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{8,6}$$

Уравнение (8,6) и есть характеристическое уравнение (8,5). Оно называется также вековым уравнением и очень часто встречается в теории колебаний, теоретической и строительной механике, в аэродинамике, в небесной механике и играет большую роль в алгебре матриц. Вековым это уравнение называется потому, что к нему приводит в небесной механике задача исследования вековых возмущений планет.

Характеристические числа или собственные значения матрицы. Если раскрыть определитель в левой части уравнения (8,6), то получится уравнение относительно λ, степень которого равна порядку матрицы A (в данном случае степень этого многочлена равна n). Характеристическое уравнение (8,6) запишется так:

$$(-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1} A_1\lambda^{n-1} + (-1)^{n-2}A_2\lambda^{n-2} + \\ + (-1)^{n-3}A_3\lambda^{n-3} + \dots + (-1)A_{n-1}\lambda + A_n = 0, \qquad (8,7)$$

где

A_1 — сумма всех диагональных миноров 1-го порядка;
A_2 — сумма всех диагональных миноров 2-го порядка;
. . . .
A_n — сумма всех диагональных миноров n-го порядка.

Неизвестная величина λ, определяемая из этого уравнения, имеет n значений

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n,$$

среди которых могут быть равные.

Таким образом, квадратная матрица A порядка n имеет n характеристических чисел.

Собственный вектор. Каждому характеристическому числу λ_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) характеристического (векового) уравнения (8,7) соответствует на основании уравнения (8,3) собственный вектор.

Собственным вектором матрицы A, принадлежащим собственному значению λ_i, называется ненулевой вектор, для которого столбец x, составленный из его элементов, удовлетворяет матричному уравнению (8,3)

$$Ax = \lambda_i x.$$

Будем собственный вектор, соответствующий корню λ_i характеристического уравнения, обозначать через b_i, а его элементы — через $b_{1i}, b_{2i}, b_{3i}, \dots, b_{ni}$, т. е.

$$b_i = \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{ni} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(элементы вектора называются также его координатами, а иногда компонентами).

Для определения координат собственного вектора, соответствующего характеристическому числу λ_i, перепишем уравнение (8,4) в развернутом виде.

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_i & a_{23} & \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda_i & \dots a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{3n} & \dots a_{nn}-\lambda_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Выполнив умножение матриц в левой части этого уравнения, учитывая условие равенства двух матриц, получим систему однородных уравнений для определения координат b_{1i}, b_{2i}, b_{3i} $\dots$, b_{ni} собственного вектора b_i

$$\begin{gathered} (a_{11}-\lambda_i)b_{1i}+a_{12}b_{2i}+a_{13}b_{3i}+\dots+a_{1n}b_{ni}=0; \\ a_{21}b_{1i}+(a_{22}-\lambda_i)\,b_{2i}+a_{23}b_{3i}+\dots+a_{2n}b_{ni}=0; \\ a_{31}b_{1i}+a_{32}b_{2i}+(a_{33}-\lambda_i)b_{3i}+\dots+a_{3n}b_{ni}=0; \quad (8,8) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}b_{1i}+a_{n2}b_{2i}+a_{n3}b_{3i}+\dots+(a_{nn}-\lambda_i)b_{ni}=0. \\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n) \end{gathered}$$

Определитель системы равен нулю, так как из этого условия были определены собственные значения λ_i матрицы A (следовательно, эти уравнения не являются независимыми). На примерах будет показано, как определяются неизвестные $b_{\alpha i}$ (i, $\alpha = 1, 2, \dots, n$).

Таким образом, будут определены все элементы собственного вектора b_i.

Следует иметь в виду, что собственный вектор можно определить с точностью до постоянного множителя.

Подставляя в (8,8) поочередно λ_1, λ_2, $\dots$, λ_n, получим n собственных векторов.

Нормированный вектор. Вектор называется нормированным, если сумма квадратов его элементов (компонент, координат) равна 1. Так, если вектор

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix},$$

то он будет нормированным при выполнении условия

$$v_1^2+v_2^2+v_3^2+\dots+v_n^2=1.$$

Чтобы нормировать вектор, надо все его элементы умножить на число

$$N = \frac{1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}}.$$

Пример. Нормировать вектор

$$V = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Находим, что

$$N = \frac{1}{\sqrt{10^2 + 15^2 + (-6)^2}} = \frac{1}{\sqrt{361}} = \frac{1}{19}$$

и поэтому нормированный вектор

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} \frac{10}{19} \\ \frac{15}{19} \\ -\frac{6}{19} \end{bmatrix}.$$

Действительно,

$$\left(\frac{10}{19}\right)^2 + \left(\frac{15}{19}\right)^2 + \left(-\frac{6}{19}\right)^2 = 1.$$

Скалярное произведение двух векторов. Скалярным произведением двух векторов называется сумма произведений соответствующих элементов. Так, если

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}; \qquad W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix},$$

то их скалярное произведение

$$VW = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 + \cdots + v_nw_n.$$

Взаимно-ортогональные векторы. Два вектора называются взаимно-ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Ортогональные матрицы. Матрица называется ортогональной, если ее столбцы попарно ортогональны.

Ортонормированные матрицы. Матрица называется ортонормированной, если каждый ее столбец есть нормированный вектор, а все столбцы попарно ортогональны.

Легко проверить, что, например, матрица

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

является ортогональной.

Раскрытие определителя в формуле (8,6). Раскрытие определителя в левой части векового уравнения (8,6) представляет собой очень громоздкую задачу, причем вычислительная работа становиться особенно трудоемкой при больших значениях n.

Вопросу о раскрытии этого определителя, т. е. преобразовании его в многочлен, и тем самым преобразовании (8,6) в алгебраическое уравнение, посвящено большое число работ. Существует много методов этого преобразования, среди которых наиболее распространенными и эффективными являются: метод А. К. Крылова, метод Данилевского, метод Микеладзе, метод Леверье, метод, основанный на решении системы n линейных алгебраических уравнений. Каждый из этих методов имеет как свои преимущества, так и недостатки. Мы выполним на этом практическом занятии упражнения по определению собственных значений матрицы и ее собственных векторов методом Леверье, а на следующем практическом занятии — методом академика А. Н. Крылова. Заметим, что метод Леверье в последнее время нашел большое применение в связи с использованием счетных машин, для которых определение степеней матрицы (на чем основан этот метод) является очень простой задачей.

Метод Леверье. Следом матрицы называется сумма ее диагональных элементов. След матрицы A обозначается символом SpA. Для матрицы A в (8,1)

$$SpA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Чтобы упростить последующие формулы, введем такие обозначения для следа степеней матрицы A:

след матрицы $A: SpA = S_1$;
след матрицы $A^2: SpA^2 = S_2$;
след матрицы $A^3: SpA^3 = S_3$.

Вообще след SpA^k k-ой степени матрицы A будем обозначать через S_k

$$SpA^k = S_k.$$

Коэффициенты A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) уравнения (8,7)

$$(-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1} \cdot A_1 + (-1)^{n-2}A_2\lambda^{n-2} + \\ + (-1)^{n-3}A_3\lambda^{n-3} + \cdots + (-1)A_{n-1}\lambda + A_n = 0$$

определяются по таким рекурентным формулам:

$$A_0 = 1.$$
$$A_1 = A_0 \cdot S_1;$$
$$A_2 = \frac{1}{2}(A_1 S_1 - A_0 S_2); \qquad (8,9)$$
$$A_3 = \frac{1}{3}(A_2 S_1 - A_1 S_2 + A_0 S_3);$$
$$A_4 = \frac{1}{4}(A_3 S_1 - A_2 S_2 + A_1 S_3 - A_0 S_4);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} A_{n-k} S_k.$$

Коэффициент A_1 есть сумма диагональных элементов матрицы A, т. е. след матрицы A. С другой стороны, на основании теоремы Вьета сумма корней характеристического уравнения равна A_1. *Таким образом, сумма корней характеристического уравнения матрицы равна ее следу.*

Коэффициент A_n в уравнении (8,7) численно равен определителю $|A|$ матрицы, а потому последняя из формул (8,9) позволяет найти величину определителя матрицы A.

Применение этого аппарата формул связано с определением степеней матрицы A. Решим ряд задач на применение метода Леверье.

Задача 8,1. Определить собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение (8,6) имеет вид

$$|A - \lambda E| = 0,$$

т. е.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 4 \\ 3 & 3-\lambda & 2 \\ 6 & 2 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

После раскрытия определителя в левой части этого уравнения получится

$$(-1)^3\lambda^3 + (-1)^2 A_1\lambda^2 + (-1)A_2\lambda + A_3 = 0; \qquad (8,10)$$
$$\lambda^3 - A_1\lambda^2 + A_2\lambda - A_3 = 0,$$

а коэффициенты A_1, A_2 и A_3 определятся по формулам (8,9). Находим степени матрицы A и следы полученных матриц:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}; \quad S_1 = 5 + 3 + 10 = 18;$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 & 16 & 62 \\ 36 & 16 & 38 \\ 96 & 32 & 128 \end{bmatrix};$$

$$S_2 = 52 + 16 + 128 = 196;$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 52 & 16 & 62 \\ 36 & 16 & 38 \\ 96 & 32 & 128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 680 & & \cdot \\ \cdot & 160 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1728 \end{bmatrix};$$

$$S_3 = 680 + 160 + 1728 = 2568.$$

Очевидно, что в наивысшей из вычисляемых степеней матрицы A следует определить только диагональные элементы, ибо она больше в умножении не участвует, а нас интересует только ее след, т. е. сумма диагональных элементов.

Применяем формулы (8,9):

$$A_0 = 1;$$

$$A_1 = 18;$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(A_1 S_1 - A_0 S_2) = \frac{1}{2}(18 \cdot 18 - 1 \cdot 196) = 64;$$

$$A_3 = \frac{1}{3}(A_2 S_1 - A_1 S_2 + A_0 S_3) = \frac{1}{3}(64 \cdot 18 - 18 \cdot 196 + 2568) = 64$$

(проверьте, что определитель матрицы A равен $A_3 = 64$). Подставляем эти значения в уравнение (8,10):

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 64\lambda - 64 = 0.$$

Очевидным корнем этого уравнения является $\lambda_1 = 2$. Разделив левую часть уравнения на $\lambda - 2$ по схеме Горнера, получаем

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -18 & 64 & -64 \\ 2 & & 2 & -32 & 64 \\ \hline & \underline{1} & \underline{-16} & \underline{32} & \underline{0} \end{array}$$

Подчеркнутые числа — коэффициенты того квадратного уравнения, из которого найдем остальные два корня

$$\lambda^2 - 16\lambda + 32 = 0;$$

$$\lambda = 8 \pm \sqrt{32};$$

$$\lambda_2 = 4(2 + \sqrt{2}); \quad \lambda_3 = 4(2 - \sqrt{2}).$$

Итак, $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 4(2 + \sqrt{2})$; $\lambda_3 = 4(2 - \sqrt{2})$.

Проверьте, равно ли произведение корней характеристического уравнения определителю матрицы A.

Теперь приступим к определению собственных векторов. Систему (8,8) для нашей задачи, учитывая, что

$$a_{11} = 5;\ a_{12} = 1;\ a_{13} = 4;$$
$$a_{21} = 3;\ a_{22} = 3;\ a_{23} = 2;$$
$$a_{31} = 6;\ a_{32} = 2;\ a_{33} = 10,$$

перепишем так:

$$\begin{aligned}(5-\lambda_i)\,b_{1i} + 1\cdot b_{2i} + 4b_{3i} &= 0;\\ 3b_{1i} + (3-\lambda_i)\,b_{2i} + 2b_{3i} &= 0;\\ 6b_{1i} + 2b_{2i} + (10-\lambda_i)\,b_{3i} &= 0.\end{aligned} \qquad (8,11)$$

Определение первого собственного вектора ($i = 1$). Для $\lambda_1 = 2$ получаем

$$\begin{aligned}3b_{11} + b_{21} + 4b_{31} &= 0;\\ 3b_{11} + b_{21} + 2b_{31} &= 0;\\ 6b_{11} + 2b_{21} + 8b_{31} &= 0.\end{aligned}$$

Определитель этой системы, конечно, равен нулю (почему?). Третье уравнение является следствием первого: если первое уравнение умножить на два, то получится третье. Отбросим третье уравнение и решим систему двух линейных однородных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned}3b_{11} + b_{21} + 4b_{31} &= 0;\\ 3b_{11} + b_{21} + 2b_{31} &= 0.\end{aligned}$$

Напомним решение таких систем. Если имеется система уравнений вида

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0;\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0,\end{aligned}$$

то

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} k;\ x_2 = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} k;\ x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} k.$$

Здесь k имеет произвольное значение, а определители получаются из матрицы коэффициентов

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

вычеркиванием из нее столбца коэффициентов при определяемом неизвестном.

В нашем случае матрица коэффициентов имеет вид

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$b_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} k;\ b_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} k;\ b_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} k;$$

$$b_{11} = -2k; \quad b_{21} = 6k; \quad b_{31} = 0.$$

Первый собственный вектор

$$b_1 = k \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Определение второго собственного вектора ($i = 2$). Подставляя в систему (8,11) второе собственное значение матрицы $\lambda_2 = 4(2 + \sqrt{2})$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} (5-8-4\sqrt{2})\, b_{12} + b_{22} + 4b_{32} &= 0; \\ 3b_{12} + (3-8-4\sqrt{2})\, b_{22} + 2b_{32} &= 0; \\ 6b_{12} + 2b_{22} + (10-8-4\sqrt{2})\, b_{32} &= 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (-3-4\sqrt{2})\, b_{12} + b_{22} + 4b_{32} &= 0; \\ 3b_{12} + (-5-4\sqrt{2})\, b_{22} + 2b_{32} &= 0; \\ 6b_{12} + 2b_{22} + (2-4\sqrt{2})\, b_{32} &= 0. \end{aligned}$$

Определитель этой системы также равен нулю. Отбросим третье уравнение и решим систему уравнений

$$(-3-4\sqrt{2})\, b_{12} + b_{22} + 4b_{32} = 0;$$

$$3b_{12} + (-5-4\sqrt{2})\, b_{22} + 2b_{32} = 0.$$

Матрица коэффициентов записывается так:

$$\begin{bmatrix} -3-4\sqrt{2} & 1 & 4 \\ 3 & -5-4\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix},$$

а неизвестные равны

$$b_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -5-4\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} k;\ b_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -3-4\sqrt{2} \\ 2 & 3 \end{vmatrix} k;$$

$$b_{32} = \begin{vmatrix} -3-4\sqrt{2} & 1 \\ 3 & -5-4\sqrt{2} \end{vmatrix} k,$$

т. е.

$$b_{12} = (22 + 16\sqrt{2})\, k;\ b_{22} = (18 + 8\sqrt{2})\, k;\ b_{32} = (44 + 32\sqrt{2})\, k.$$

Второй собственный вектор

$$b_2 = k\begin{bmatrix} 22+16\sqrt{2} \\ 18+\ 8\sqrt{2} \\ 44+32\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Определение третьего собственного вектора ($i=3$). Для $\lambda_3 = 4(2-\sqrt{2})$ из системы (8,11) получаем

$$\begin{aligned} &(5-8+4\sqrt{2})\,b_{13} + b_{23} + 4b_{33} = 0;\\ &3b_{13} + (3-8+4\sqrt{2})\,b_{23} + 2b_{33} = 0;\\ &6b_{13} + 2b_{23} + (10-8+4\sqrt{2})\,b_{33} = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &-(3-4\sqrt{2})\,b_{13} + b_{23} + 4b_{33} = 0;\\ &3b_{13} + (-5+4\sqrt{2})\,b_{23} + 2b_{33} = 0;\\ &6b_{13} + 2b_{23} + (2+4\sqrt{2})\,b_{33} = 0. \end{aligned}$$

Ясно, что определитель и этой системы уравнений равен нулю. Отбрасываем первое уравнение и решаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &3b_{13} + (-5+4\sqrt{2})\,b_{23} + 2b_{33} = 0;\\ &6b_{13} + 2b_{23} + (2+4\sqrt{2})\,b_{33} = 0. \end{aligned}$$

Получаем

$$b_{13} = (18-12\sqrt{2})\,k;\quad b_{23} = (6-12\sqrt{2})\,k;$$
$$b_{33} = (36-24\sqrt{2})\,k.$$

Таким образом, третий собственный вектор

$$b_3 = k\begin{bmatrix} 18-12\sqrt{2} \\ 6-12\sqrt{2} \\ 36-24\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что собственные векторы определяются с точностью до постоянного множителя, можно, полагая $k=1$, матрицу собственных векторов записать в таком виде:

$$b = \begin{bmatrix} -2 & 22+16\sqrt{2} & 18-12\sqrt{2} \\ 6 & 18+\ 8\sqrt{2} & 6-12\sqrt{2} \\ 0 & 44+32\sqrt{2} & 36-24\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Замечание. Очевидно, что, давая множителю k различные значения, этой матрице можно придать бесконечное множество видов. Данное замечание относится и к следующим задачам, в которых, определяются собственные векторы и их матрица.

Задача 8,2. Для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

найти ее собственные значения и собственные векторы.

Решение.

Заданная матрица — симметричная.

Эти матрицы обладают такими важными свойствами:

1. *Матрица, составленная из собственных векторов симметричной матрицы, ортогональна.*

2. *Матрица, составленная из собственных нормированных векторов симметричной матрицы, также ортогональна.*

3. Если матрица b — ортонормированная, то матрица, транспонированная по отношению к ней, является для нее и обратной, т. е.

$$b \cdot b' = E,$$

а это значит, что

$$b' = b^{-1}.$$

Следует также иметь в виду, что если b — симметричная матрица, то транспонированная по отношению к ней матрица b' совпадает с матрицей b.

4. Если $\bar{b}$ — матрица, составленная из собственных нормированных векторов, то произведение

$$b \cdot A \cdot b^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

т. е. это произведение равно диагональной матрице, диагональные элементы которой равны собственным значениям матрицы.

5. Собственные значения симметричной матрицы — вещественные числа.

Характеристическое уравнение (8,6) в нашем случае запишется так:

$$\begin{vmatrix} 11-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 10-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (8,12)$$

Если раскрыть определитель в левой части, то получится на основании (8,7) уравнение

$$(-1)^3\lambda^3 + (-1)^2 A_1\lambda^2 + (-1) A_2\lambda + A_3 = 0$$

или

$$\lambda^3 - A_1\lambda^2 + A_2\lambda - A_3 = 0. \qquad (8,13)$$

Определяем вторую и третью степени матрицы A:

$$A=\begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix};\ S_1=11+10+6=27;$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 161 & -134 & 58 \\ -134 & 152 & -76 \\ 58 & -76 & 56 \end{bmatrix};$$

$$S_2=161+152+56=369;$$

$$A^3=A_2\cdot A=\begin{bmatrix} 161 & -134 & 58 \\ -134 & 152 & -76 \\ 58 & -76 & 66 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 2691 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2628 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 756 \end{bmatrix};$$

$$S_3=2691+2628+756=6075.$$

Мы заметили, что данная матрица A — симметричная. Ее квадрат A^2 — также симметричная матрица.

Теперь определяем коэффициенты A_1, A_2 и A_3 характеристического уравнения по формулам (8,9)

$$A_1=A_0S_1=1\cdot 27=27;$$

$$A_2=\frac{1}{2}(A_1S_1-S_2)=\frac{1}{2}(27\cdot 27-369)=180;$$

$$A_3=\frac{1}{3}(A_2S_1-A_1S_2+S_3)=\frac{1}{3}(180\cdot 27-27\cdot 369+6075)=324$$

(проверьте что определитель матрицы A равен $A_3=324$).

Таким образом, уравнение (8,13) запишется в виде

$$\lambda^3-27\lambda^2+180\lambda-324=0.$$

Одним корнем уравнения является $\lambda_1=3$, в чем легко убедиться непосредственной проверкой. Разделим левую часть уравнения на $\lambda-3$ по схеме Горнера:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -27 & 180 & -324 \\ 3 & & 3 & -72 & 324 \\ \hline & \underline{1} & \underline{-24} & \underline{108} & 0 \end{array}$$

Коэффициенты частного подчеркнуты. Квадратное уравнение для определения остальных двух корней запишется так:

$$\lambda^2 - 24\lambda + 108 = 0;$$
$$\lambda = 12 \pm \sqrt{144 - 108};$$
$$\lambda_2 = 6; \ \lambda_3 = 18.$$

Итак, корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = 3; \ \lambda_2 = 6; \ \lambda_3 = 18$$

(проверьте, равна ли сумма корней следу матрицы, а их произведение—ее определителю).

Система уравнений (8,8) для определения координат собственных векторов в нашем случае запишется так:

$$\begin{aligned} (11 - \lambda_i)\, b_{1i} - 6b_{2i} + 2b_{3i} &= 0; \\ -6b_{1i} + (10 - \lambda_i)\, b_{2i} - 4b_{3i} &= 0; \\ 2b_{1i} - 4b_{2i} + (6 - \lambda_i)\, b_{3i} &= 0. \end{aligned} \qquad (8,14)$$

Подставим в нее поочередно λ_1, λ_2 и λ_3.

Определение первого собственного вектора ($i = 1$). Подставляем в систему (8,14) $\lambda_1 = 3$ и получаем

$$\begin{aligned} 8b_{11} - 6b_{21} + 2b_{31} &= 0; \\ -6b_{11} + 7b_{21} - 4b_{31} &= 0; \\ 2b_{11} - 4b_{21} + 3b_{31} &= 0. \end{aligned}$$

Ясно, что определитель этой системы равен нулю. Здесь независимы только два уравнения (действительно, если сложить второе уравнение с третьим и сумму умножить на —2, то получится первое уравнение). Рассмотрим систему, состоящую из первого и второго уравнений

$$\left. \begin{aligned} 8b_{11} - 6b_{21} + 2b_{31} &= 0; \\ -6b_{11} + 7b_{21} - 4b_{31} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Матрица коэффициентов

$$\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \end{bmatrix};$$

$$b_{11} = 10k; \quad b_{21} = 20k; \quad b_{31} = 20k,$$

а первый собственный вектор

$$b_1 = k \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Определение второго собственного вектора ($l = 2$). Подставляем в систему (8,14) $\lambda_2 = 6$ и получаем для определения координат второго собственного вектора систему уравнений

$$\begin{aligned} 5b_{12} - 6b_{22} + 2b_{32} &= 0; \\ -6b_{12} + 4b_{22} - 4b_{32} &= 0; \\ 2b_{12} - 4b_{22} \qquad &= 0, \end{aligned}$$

определитель которой равен нулю. Независимых уравнений в этой системе только два (если второе уравнение разделить на -2 и сложить с третьим, то получится первое).

Решим систему, состоящую из второго и третьего уравнений. Матрица коэффициентов

$$\begin{bmatrix} -6 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix};$$

$$b_{12} = -16k; \quad b_{22} = -8k; \quad b_{32} = 16k,$$

а второй собственный вектор

$$b_2 = k \cdot \begin{bmatrix} -16 \\ -8 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Определение третьего собственного вектора ($l = 3$). Система (8,14) для $\lambda_3 = 18$ примет такой вид:

$$\begin{aligned} -7b_{13} - 6b_{23} + 2b_{33} &= 0; \\ -6b_{13} - 8b_{23} - 4b_{33} &= 0; \\ 2b_{13} - 4b_{23} - 12b_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Определитель этой системы равен нулю. Здесь опять-таки только два уравнения независимы (если первое уравнение умножить на -2, а второе на 2 и сложить их, то получится третье уравнение).

Матрица коэффициентов первых двух уравнений

$$\begin{bmatrix} -7 & -6 & 2 \\ -6 & -8 & -4 \end{bmatrix};$$

$$b_{13} = 40k; \quad b_{23} = -40k; \quad b_{33} = 20k,$$

а третий собственный вектор

$$b_3 = k \cdot \begin{bmatrix} 40 \\ -40 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Так как собственные векторы определяются с точностью до постоянного множителя, то можно взять $k = 1$ для b_1, b_2 и b_3.

Матрица b собственных векторов матрицы A при $k=1$ запишется так:

$$b=\begin{bmatrix}10 & -16 & 40\\ 20 & -8 & -40\\ 20 & 16 & 20\end{bmatrix}.$$

Матрица b по свойству 1 симметрических матриц (стр. 202), как легко проверить, действительно ортогональна:

$$b_1\cdot b_2=10\cdot(-16)+20\cdot(-8)+20\cdot 16=0;$$
$$b_1\cdot b_3=10\cdot 40+20\cdot(-40)+20\cdot 20=0;$$
$$b_2\cdot b_3=-16\cdot 40+(-8)\cdot(-40)+16\cdot 20=0.$$

Пронормируем каждый из собственных векторов b_1, b_2 и b_3 и составим матрицу из нормированных собственных векторов.

Для первого собственного вектора b_1 нормирующий множитель

$$N=\frac{1}{\sqrt{10^2+20^2+20^2}}=\frac{1}{30}$$

(см. стр. 194).

Для второго собственного вектора b_2 нормирующий множитель

$$N_2=\frac{1}{-\sqrt{(-16)^2+(-8)^2+16^2}}=-\frac{1}{24}.$$

Знак минус перед корнем выбран для того, чтобы матрица преобразования $\bar{b}$ была симметричной.

Для третьего собственного вектора b_3 нормирующий множитель

$$N_3=\frac{1}{\sqrt{40^2+(-40)^2+20^2}}=\frac{1}{60}.$$

Нормированные собственные векторы обозначим соответственно через $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, $\bar{b}_3$:

$$b_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix};\quad b_2=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{bmatrix};\quad b_3=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

и составим из них матрицу

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array}\\ b= & \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}.\end{array}\qquad(8,15)$$

Проверим выполнение свойства 2 симметричных матриц (стр. 202). Составим скалярные произведения $\bar{b}_1 \cdot b_2$, $\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_3$ и $\bar{b}_2 \cdot \bar{b}_3$. Легко убедиться, что каждое из них равно нулю.

$$\begin{aligned} b_1 \cdot b_2 &= \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = 0; \\ b_1 \cdot b_3 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0; \\ b_2 \cdot b_3 &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = 0. \end{aligned} \tag{8,16}$$

Таким образом, векторы $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ и $\bar{b}_3$ попарно ортогональны, матрица (8,15) — ортогональная матрица, а так как векторы $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ и $\bar{b}_3$ нормированы, то матрица (8,15) ортонормирована.

Заметив, что матрица (8,15) ортонормированная, проверим выполнение третьего свойства.

Составим произведение $\bar{b} \cdot \bar{b}'$ и убедимся, что получится единичная матрица. Это будет означать, что матрица $\bar{b}'$ обратна матрице $\bar{b}$:

$$b \cdot b' = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Поскольку $b \cdot b' = E$, то $\bar{b}'$ есть матрица, обратная b.

Теперь проверим выполнение свойства 4. Составим произведение $b \cdot A \cdot b^{-1}$:

$$b \cdot A \cdot b^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \\ 12 & -12 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}. \tag{8,17}$$

Действительно, получилась диагональная матрица с диагональными элементами, равными $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ и $\lambda_3 = 18$.

Отметим также выполнение свойства 5: все собственные числа симметричной матрицы — действительные числа. Этим мы и закончим решение данной задачи.

Задача 8,3. Найти собственные значения и собственные векторы симметричной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

и проверить свойства 1 и 2 симметричных матриц, указанные в предыдущей задаче.

Решение. Характеристическое уравнение запишется так:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 & 2 \\ 3 & 6-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Если раскрыть определитель в его левой части, то получится уравнение такое же, как и (8,13).

$$\lambda^3 - A_1\lambda^2 + A_2\lambda - A_3 = 0. \qquad (8,18)$$

Чтобы найти коэффициенты A_1, A_2 и A_3, найдем A^2 — вторую степень матрицы A и диагональные элементы матрицы A^3.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \; S_1 = 13;$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & 40 & 20 \\ 40 & 49 & 20 \\ 20 & 20 & 9 \end{bmatrix}; \; S_2 = 107.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 49 & 40 & 20 \\ 40 & 49 & 20 \\ 20 & 20 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 454 & & \\ & 454 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 89 \end{bmatrix};$$

$$S_3 = 997.$$

$A_0 = 1;$

$A_1 = S_1 = 13;$

$A_2 = \frac{1}{2}(A_1S_1 - S_2) = \frac{1}{2}(13 \cdot 13 - 107) = 31;$

$A_3 = \frac{1}{3}(A_2S_1 - A_1S_2 + S_3) = \frac{1}{3}(31 \cdot 13 - 13 \cdot 107 + 997) = 3.$

С этими значениями коэффициентов уравнение (8,18) запишется так:

$$\lambda^3 - 13\lambda^2 + 31\lambda - 3 = 0.$$

Его корнем, как легко проверить, будет $\lambda_1 = 3$. Разделим левую часть этого уравнения на $\lambda - 3$ по схеме Горнера;

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -13 & 31 & -3 \\ & & 3 & -30 & 3 \\ \hline & \underline{1} & -\underline{10} & \underline{1} & 0 \end{array}$$

Коэффициенты частного от деления подчеркнуты, а квадратное уравнение для определения остальных двух корней будет таким:

$$\lambda^2 - 10\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_2 = 5 + 2\sqrt{6};\ \lambda_3 = 5 - 2\sqrt{6}.$$

Таким образом, собственные значения матрицы найдены

$$\lambda_1 = 3;\ \lambda_2 = 5 + 2\sqrt{6};\ \lambda_3 = 5 - 2\sqrt{6}.$$

Система уравнений (8,9) для определения собственных векторов с найденными собственными значениями матрицы A запишется так:

$$\begin{aligned} (6 - \lambda_i)\, b_{1i} + 3b_{2i} + 2b_{3i} &= 0 \\ 3b_{1i} + (6 - \lambda_i)\, b_{2i} + 2b_{3i} &= 0 \\ 2b_{1i} + 2b_{2i} + (1 - \lambda_i)\, b_{3i} &= 0 \\ (i = 1,\ 2,\ 3). \end{aligned} \tag{8,19}$$

Для определения собственных векторов подставляем в эту систему поочередно λ_1, λ_2 и λ_3.

Определение первого собственного вектора ($i = 1$). При $\lambda_1 = 3$ система (8,19) примет вид

$$\begin{aligned} 3b_{11} + 3b_{21} + 2b_{31} &= 0; \\ 3b_{11} + 3b_{21} + 2b_{31} &= 0; \\ 2b_{11} + 2b_{21} - 2b_{31} &= 0. \end{aligned}$$

Определитель этой системы равен, конечно, нулю. Здесь второе уравнение совпадает с первым. Независимых уравнений в системе два.

Решим систему уравнений из второго и третьего уравнений

$$\begin{aligned} 3b_{11} + 3b_{21} + 2b_{31} &= 0; \\ 2b_{11} + 2b_{21} - 2b_{31} &= 0. \end{aligned}$$

Матрица коэффициентов записывается так:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix};$$

$$b_{11} = -10k;\ b_{21} = 10k;\ b_{31} = 0,$$

а первый собственный вектор

$$b_1 = k \cdot \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Определение второго собственного вектора ($i = 2$). Для $\lambda_2 = 5 + 2\sqrt{6}$ система (8,19) запишется так:

$$\begin{aligned}
&(6 - 5 - 2\sqrt{6})\, b_{12} + 3b_{22} + 2b_{32} = 0;\\
&3b_{12} + (6 - 5 - 2\sqrt{6})\, b_{22} + 2b_{32} = 0;\\
&2b_{12} + 2b_{22} + (1 - 5 - 2\sqrt{6})\, b_{32} = 0
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
&(1 - 2\sqrt{6})\, b_{12} + 3b_{22} + 2b_{32} = 0;\\
&3b_{12} + (1 - 2\sqrt{6})\, b_{22} + 2b_{32} = 0;\\
&2b_{12} + 2b_{22} + (-4 - 2\sqrt{6})\, b_{32} = 0.
\end{aligned}$$

Определитель этой системы равен нулю, в ней только два независимых уравнения.

Решим систему из первого и второго уравнений

$$(1 - 2\sqrt{6})\, b_{12} + 3b_{22} + 2b_{32} = 0;$$

$$3b_{12} + (1 - 2\sqrt{6})\, b_{22} + 2b_{32} = 0.$$

Матрица коэффициентов этой системы имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 - 2\sqrt{6} & 3 & 2 \\ 3 & 1 - 2\sqrt{6} & 2 \end{bmatrix}.$$

Неизвестные определяются формулами

$$b_{12} = (4\sqrt{6} + 4)\, k; \quad b_{22} = (4\sqrt{6} + 4)\, k;$$

$$b_{32} = (16 - 4\sqrt{6})\, k.$$

Второй собственный вектор

$$b_2 = k \cdot \begin{bmatrix} 4 + 4\sqrt{6} \\ 4 + 4\sqrt{6} \\ 16 - 4\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Определение третьего собственного вектора ($l = 3$). При $\lambda_3 = 5 - 2\sqrt{6}$ система (8,19) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
(6-5+2\sqrt{6})\,b_{13} + 3b_{23} \qquad\qquad\qquad + 2b_{33} &= 0;\\
3b_{13} + (6-5+2\sqrt{6})\,b_{23} + 2b_{33} &= 0;\\
2b_{13} + \qquad\qquad 2b_{23} + (1-5+2\sqrt{6})\,b_{33} &= 0
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
(1+2\sqrt{6})\,b_{13} + \quad 3b_{23} \qquad\qquad + 2b_{33} &= 0;\\
3b_{13} + (1+2\sqrt{6})\,b_{23} + 2b_{33} &= 0;\\
2b_{13} + 2b_{23} \qquad\qquad + (-4+2\sqrt{6})\,b_{33} &= 0.
\end{aligned}$$

Опять-таки определитель этой системы равен нулю, независимых уравнений в ней два. Решая систему из первого и второго уравнений, находим, что

$$b_{13} = (4 - 4\sqrt{6})\,k; \quad b_{23} = (4 - 4\sqrt{6})\,k;$$
$$b_{33} = (16 + 4\sqrt{6})\,k,$$

а третий собственный вектор

$$b_3 = k \cdot \begin{bmatrix} 4-4\sqrt{6} \\ 4-4\sqrt{6} \\ 16+4\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Так как собственные векторы определяются с точностью до постоянного множителя, то, полагая $k = 1$ в выражениях для b_1, b_2 и b_3, получаем матрицу собственных векторов

$$b = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad b_1 & \qquad b_2 & \qquad b_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -10 & 4+4\sqrt{6} & 4-4\sqrt{6} \\ 10 & 4+4\sqrt{6} & 4-4\sqrt{6} \\ 0 & 16-4\sqrt{6} & 16+4\sqrt{6} \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (8,20)$$

Убедимся в выполнении первого свойства симметричных матриц: составим скалярные произведения собственных векторов

$$b_1b_2 = -10 \cdot (4\sqrt{6} + 4) + 10(4\sqrt{6} + 4) + 0 \cdot (16 - 4\sqrt{6}) = 0;$$
$$b_1b_3 = -10(4 - 4\sqrt{6}) + 10(4 - 4\sqrt{6}) + 0(16 + 4\sqrt{6}) = 0;$$
$$b_2b_3 = (4\sqrt{6} + 4)(4 - 4\sqrt{6}) + (4\sqrt{6} + 4)(4 - 4\sqrt{6}) + $$
$$+ (16 - 4\sqrt{6})(16 + 4\sqrt{6}) = 0.$$

Таким образом, матрица (8,20), составленная из собственных векторов симметричной матрицы A, является ортогональной.

Теперь пронормируем собственные векторы b_1, b_2 и b_3 и убедимся в выполнении второго свойства симметрических матриц, указанного в предыдущей задаче.

Для первого собственного вектора нормирующий множитель

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{(-10)^2 + 10^2}} = \frac{1}{10\sqrt{2}},$$

а сам этот вектор в нормированном виде

$$b_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для второго собственного вектора нормирующий множитель

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{(4+4\sqrt{6})^2 + (4+4\sqrt{6})^2 + (16-4\sqrt{6})^2}} = \frac{1}{8\sqrt{9-\sqrt{6}}},$$

а сам этот вектор в нормированном виде

$$b_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}} \\ \frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{6}}} \end{bmatrix}.$$

Наконец, для третьего собственного вектора нормирующий множитель

$$N_3 = \frac{1}{\sqrt{(4-4\sqrt{6})^2 + (4-4\sqrt{6})^2 + (16+4\sqrt{6})^2}} = \frac{1}{8\sqrt{9+\sqrt{6}}},$$

а в нормированном виде

$$b_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} \\ \frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{6}}} \end{bmatrix}.$$

Матрица b нормированных собственных векторов имеет вид

$$b = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad\bar{b}_1 \quad & \quad\bar{b}_2\quad & \quad\bar{b}_3\quad \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}} & -\frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}} & -\frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{6}}} & \frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{6}}} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Легко проверить, что и эта матрица ортогональна, так как

$$b_1 \cdot b_2 = 0; \quad b_1 \cdot b_3 = 0; \quad b_2 \cdot b_3 = 0;$$

Тем самым выполнено и свойство 2.

Теперь легко проверить, что

$$b \cdot b' = E,$$

а

$$b \cdot A \cdot b' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5+2\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 5-2\sqrt{6} \end{bmatrix},$$

т. е. выполняется и четвертое свойство ортогональных матриц.

Выполняется и свойство 5: все собственные значения заданной симметрической матрицы — действительные числа.

Задача 8,4 (для самостоятельного решения). Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Промежуточные результаты:

1. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 10\lambda^2 + 24\lambda - 16 = 0.$$

2. Собственные значения матрицы

$$\lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = 4 + 2\sqrt{2}; \quad \lambda_3 = 4 - 2\sqrt{2}.$$

3. Система уравнений для определения собственных векторов

$$\begin{aligned} (3-\lambda_i)b_{1i} + 2b_{2i} \quad\quad + b_{3i} \quad\quad &= 0; \\ 2b_{1i} + (4-\lambda_i)b_{2i} + 2b_{3i} \quad\quad &= 0; \\ b_{1i} + 2b_{2i} \quad\quad + (3-\lambda_i)b_{3i} &= 0. \end{aligned}$$

Первый собственный вектор ($i = 1$)

$$b_1 = k \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Второй собственный вектор

$$b_2 = k \cdot \begin{bmatrix} 4+2\sqrt{2} \\ 4+4\sqrt{2} \\ 4+2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Третий собственный вектор

$$b_3 = k \cdot \begin{bmatrix} 4-2\sqrt{2} \\ 4-4\sqrt{2} \\ 4-2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Матрица собственных векторов

$$\begin{array}{c} \qquad b_1 \qquad\quad b_2 \qquad\qquad\quad b_3 \\ b = \begin{bmatrix} 1 & 4+2\sqrt{2} & 4-2\sqrt{2} \\ 0 & 4+4\sqrt{2} & 4-4\sqrt{2} \\ -1 & 4+2\sqrt{2} & 4-2\sqrt{2} \end{bmatrix}. \end{array}$$

Проверить, что имеют место равенства

$$b \cdot b' = E \quad \text{и} \quad b \cdot A \cdot b' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4-2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Задача 8,5 (для самостоятельного решения). Найти собственные значения матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Промежуточные результаты:

1. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4-\lambda & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

2. Степени матрицы A:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 45 & 16 & 34 & 39 \\ 29 & 16 & 22 & 31 \\ 58 & 24 & 48 & 62 \\ 41 & 16 & 34 & 43 \end{bmatrix};$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 45 & 16 & 34 & 39 \\ 29 & 16 & 22 & 31 \\ 58 & 24 & 48 & 62 \\ 41 & 16 & 34 & 43 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 510 & 200 & 404 & 498 \\ 358 & 152 & 284 & 362 \\ 716 & 288 & 576 & 724 \\ 502 & 200 & 404 & 506 \end{bmatrix};$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 510 & 200 & 404 & 498 \\ 358 & 151 & 284 & 362 \\ 716 & 288 & 576 & 724 \\ 502 & 200 & 404 & 506 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6060 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1744 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 6912 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & 6052 \end{bmatrix}.$$

3. Следы матрицы

$S_1 = 16$ — след матрицы A;
$S_2 = 152$ — след матрицы A^2;
$S_3 = 1744$ — след матрицы A^3;
$S_4 = 20768$ — след матрицы A^4.

4. По формулам (8,9) определяются коэффициенты характеристического уравнения:

$$A_1 = S_1 = 16;$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(A_1S_1 - S_2) = \frac{1}{2}(16 \cdot 16 - 152) = 52;$$

$$A_3 = \frac{1}{3}(A_2S_1 - A_1S_2 + S_3) = \frac{1}{3}(52 \cdot 16 - 16 \cdot 152 + 1744) = 48;$$

$$A_4 = \frac{1}{4}(A_3S_1 - A_2S_2 + A_1S_3 - S_4) = \frac{1}{4}(48 \cdot 16 - 52 \cdot 152 + 16 \times \times 1744 - 20768) = 0.$$

5. Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - 16\lambda^3 + 52\lambda^2 - 48\lambda = 0.$$

Ответ. Собственные значения матрицы A:

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 2; \quad \lambda_3 = 12; \quad \lambda_4 = 2;$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = S_1.$$

Убедиться, что определитель матрицы

$$|A| = 0,$$

т. е. матрица особенная (иначе — вырожденная).

ДЕВЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Преобразование характеристического уравнения методом академика А. Н. Крылова, Теорема Кэли — Гамильтона.

1. МЕТОД АКАДЕМИКА А. Н. КРЫЛОВА ДЛЯ РАСКРЫТИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ В ВЕКОВОМ УРАВНЕНИИ

Академик А. Н. Крылов указал удобный метод раскрытия определителя в левой части уравнения (8,6). Сущность этого метода заключается в том, что определитель путем алгебраических преобразований приводится к такому виду, который позволяет его легко вычислить.

Трудность раскрытия определителя состоит в том, что неизвестная величина λ входит только в диагональные элементы. Методом А. Н. Крылова определитель в левой части (8,6) преобразуется так, что неизвестные величины λ оказываются не диагональными его элементами, а элементами столбца. Это дает возможность на основании известных свойств определителей разложить его по элементам этого столбца, довольно просто представить определитель в уравнении (8,6) в виде многочлена и получить алгебраическое уравнение с неизвестным λ.

Ознакомиться с теорией этого вопроса можно по таким источникам:

1. А. Н. Крылов. О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем («Известия Академии наук СССР», 1931).

2. Н. Н. Лузин. О методе академика Крылова составления векового уравнения («Известия Академии наук СССР», 1931).

3. А. К. Сушкевич. Основы высшей алгебры, глава IX, § 171 (Издательство ОНТИ, 1937).

Здесь же, не вдаваясь в теоретические подробности, мы изложим метод академика А. Н. Крылова и покажем на примерах его применение.

Левая часть векового уравнения (8,6) записывается так:

$$|A-\lambda E|.$$

Для применения метода Крылова надо выполнить следующее:

1. Составить первые строки последовательных степеней матрицы A, т. е. первые строки матриц A^2, A^3, A^4, ..., A^n.

Если обозначить через $a_{1j}^{(k)}$ элементы первой строки k-ой степени матрицы A, то их просто можно определить по формуле приведения

$$a_{1j}^{(k)} = \sum_{\beta=1}^{n} a_{1\beta}^{(k-1)} a_{\beta j}, \tag{9,1}$$

где верхний индекс (k) — указатель степени матрицы, причем $k = 2, 3, 4, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$, $a_{1j}^{(1)} = a_{1j}$. Эта формула позволяет по изестным элементам первой строки матрицы A^{k-1} и элементам матрицы A найти элементы первой строки матрицы A^k.

Таким образом, должны быть составлены матрицы

$$A^2 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \ldots & a_{1n}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix};$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} & \ldots & a_{1n}^{(3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix};$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(4)} & a_{12}^{(4)} & \ldots & a_{1n}^{(4)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix};$$

$$A^n = \begin{bmatrix} A_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & \ldots & a_{1n}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

2. После того как первые строки степеней матрицы A найдены, составить определитель такого вида:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda & a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} \\ \lambda^2 & a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \ldots & a_{1n}^{(2)} \\ \lambda^3 & a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} & a_{13}^{(3)} & \ldots & a_{1n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda^n & a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & a_{13}^{(n)} & \ldots & a_{1n}^{(n)} \end{vmatrix}, \tag{9,2}$$

в котором степени неизвестной величины λ уже расположены в первом столбце, а строки степеней матрицы A являются строками минора элемента, стоящего в левом верхнем углу в (9,2).

Этот определитель тождествен определителю левой части уравнения (8,6), а раскрыть его значительно проще: его надо только разложить по элементам первого столбца. Получится уравнение степени n относительно λ. Решение его и даст собственные значения исходной матрицы. Определитель (9,2) называется определителем Крылова. Преобразованием определителя $|A-\lambda E|$ в уравнении (8,6) к виду (9,2) обойдены все большие трудности, связанные с его раскрытием.

3. Надо с помощью тождественных преобразований определителя (9,2) внести дальнейшие упрощения в разложение этого определителя по элементам первого столбца.

Предполагая, что элементы второй строки в (9,2) $a_{12}^{(1)}$, $a_{13}^{(1)}, \ldots, a_{1n}^{(1)}$ не равны нулю, разделим элементы столбцов, начиная с третьего, соответственно на $a_{12}^{(1)}$, $a_{13}^{(1)} \ldots, a_{1n}^{(1)}$, что равносильно вынесению за знак определителя произведения $a_{12}^{(1)} \cdot a_{13}^{(1)} \ldots a_{1n}^{(1)}$. После этого деления получится определитель вида

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda & a_{11}^{(1)} & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda^2 & a_{11}^{(2)} & \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{12}^{(1)}} & \frac{a_{13}^{(2)}}{a_{13}^{(1)}} & \ldots & \frac{a_{1n}^{(2)}}{a_{1n}^{(1)}} \\ \lambda^3 & a_{11}^{(3)} & \frac{a_{12}^{(3)}}{a_{12}^{(1)}} & \frac{a_{13}^{(3)}}{a_{13}^{(1)}} & \ldots & \frac{a_{1n}^{(3)}}{a_{1n}^{(1)}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda^n & a_{11}^{(n)} & \frac{a_{12}^{(n)}}{a_{12}^{(1)}} & \frac{a_{13}^{(n)}}{a_{13}^{(1)}} & \ldots & \frac{a_{1n}^{(n)}}{a_{1n}^{(1)}} \end{vmatrix}. \qquad (9,3)$$

Обозначим дроби $\frac{a_{1k}^{(j)}}{a_{1k}}$ через $b_{1k}^{(j)}$, где $k=2, 3, 4, \ldots n$; $j=2, 3, 4, \ldots n$, т. е.

$$\frac{a_{1k}^{(j)}}{a_{1k}^{(1)}} = b_{1k}^{(j)}$$

и определитель (9,3) примет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda & a_{11}^{(1)} & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda^2 & a_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} & \ldots & b_{1n}^{(2)} \\ \lambda^3 & a_{11}^{(3)} & b_{12}^{(3)} & b_{13}^{(3)} & \ldots & b_{1n}^{(3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda^n & a_{11}^{(n)} & b_{12}^{(n)} & b_{13}^{(n)} & \ldots & b_{1n}^{(n)} \end{vmatrix}. \qquad (9,4)$$

Вычтем теперь из элементов четвертого и следующего за ним столбцов определителя (9,4) соответствующие элементы третьего столбца и получим определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ \lambda & a_{11}^{(1)} & 1 & 0 & \ldots 0 \\ \lambda^2 & a_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & c_{13}^{(2)} & \ldots c_{1n}^{(2)} \\ \lambda^3 & a_{11}^{(3)} & b_{12}^{(3)} & c_{13}^{(3)} & \ldots c_{1n}^{(3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda^n & a_{11}^{(n)} & b_{12}^{(n)} & c_{13}^{(n)} & \ldots c_{1n}^{(n)} \end{vmatrix}, \tag{9,5}$$

где

$$c_{ik}^{(j)} = b_{ik}^{(j)} - b_{12}^{(j)}$$

$$(k = 3,\ 4,\ \ldots\ n;\ j = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ n)$$

С определителем (9,5) поступаем так же, как и с определителем (9,2), но начиная уже с четвертого столбца.

Предполагая, что элементы третьей строки $c_{13}^{(2)}, \ldots c_{1n}^{(2)}$ не равны нулю, разделим все элементы столбцов, начиная с четвертого соответственно на $c_{13}^{(2)}, \ldots, c_{1n}^{(2)}$, т. е. на верхний, не равный нулю элемент этого столбца.

Такое деление равносильно вынесению за знак определителя произведения $c_{13}^{(2)} \cdot c_{14}^{(2)} \ldots c_{1n}^{(2)}$. Получится определитель вида

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ \lambda & a_{11}^{(1)} & 1 & 0 & \ldots 0 \\ \lambda^2 & a_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & 1 & \ldots 1 \\ \lambda^3 & a_{11}^{(3)} & b_{12}^{(3)} & d_{13}^{(3)} & \ldots d_{1n}^{(3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_n & a_{11}^{(n)} & b_{12}^{(n)} & d_{13}^{(n)} & \ldots d_{1n}^{(n)} \end{vmatrix}, \tag{9,6}$$

где

$$d_{1k}^{(j)} = \frac{c_{1k}^{(j)}}{c_{1k}^{(2)}}\,(k,\ j = 3,\ 4,\ \ldots\ n);$$

После этого вычтем из элементов пятого и следующего за ним столбцов соответствующие элементы четвертого столбца, отчего величина определителя не изменится.

Определитель примет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & a_{11}^{(1)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda^2 & a_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & 1 & \dots & 0 \\ \lambda^3 & a_{11}^{(3)} & b_{12}^{(3)} & d_{13}^{(3)} & \dots & e_{1n}^{(3)} \\ . & . & . & . & . & . \\ \lambda^n & a_{11}^{(n)} & b_{12}^{(n)} & d_{13}^{(n)} & \dots & e_{1n}^{(n)} \end{vmatrix}, \qquad (9,7)$$

где

$$e_{1k}^{(j)} = d_{1k}^{(j)} - d_{13}^{(j)}$$
$$(j = 3,\ 4,\ \dots,\ n);\ k = 4,\ 5,\ \dots,\ n).$$

Поступая так же с элементами пятого и следующих столбцов, получим в конце концов определитель такого вида:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & a_{11}^{(1)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda^2 & a_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & 1 & \dots & 0 \\ \lambda^3 & a_{11}^{(3)} & b_{12}^{(3)} & d_{13}^{(3)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ \lambda^n & a_{11} & b_{12}^{(n)} & d_{13}^{(n)} & \dots & SpA \end{vmatrix}. \qquad (9,8)$$

Следует помнить, что в правом нижнем углу определителя должен получиться след SpA матрицы A. Заметим, что чем выше порядок матрицы A, собственные значения которой отыскиваются, тем эффективнее описанный метод, предложенный академиком Крыловым.

Переходя к уравнению (8,6), мы видим, что в его левой части находится определитель (9,8), множителями перед которым будут указанные выше произведения

$$(a_{12}^{(1)} \cdot a_{13}^{(1)} \dots a_{1n}^{(1)})\,(c_{13}^{(2)} \cdot c_{14}^{(2)} \dots c_{1n}^{(2)}) \dots, \qquad (9,9)$$

а в правой части — нуль.

Эти множители можно отбросить, что равносильно сокращению уравнения на все произведение (9,9). После описанных преобразований вместо уравнения (8,6) получится уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & a_{11}^{(1)} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda^2 & a_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda^3 & a_{11}^{(3)} & b_{12}^{(3)} & d_{13}^{(3)} & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 \\ \lambda^n & a_{11}^{(n)} & b_{12}^{(n)} & d_{13}^{(n)} & e_{14}^{(n)} & \dots & SpA \end{vmatrix} = 0. \qquad (9,10)$$

Если среди элементов, на которые требовалось производить деление, окажутся равные нулю, то надо сразу раскрывать определитель (9,2), не прибегая к дальнейшим его преобразованиям, или переставить строки так, чтобы избежать этой неприятности. Теперь применим описанный метод к нескольким матрицам, выполняя все указанные операции последовательно. В качестве матриц возьмем те, которые нам уже встретились в задачах 8,1 — 8,5.

Задача 9, 1. По методу академика А. Н. Крылова найти характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Решение. 1. С этой матрицей мы уже встречались в задаче 8,1. Находим первые строки последовательных степеней матрицы A по формуле приведения (9, 1)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 52 & 16 & 62 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix};$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 680 & 224 & 860 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Первые строки матриц A^2 и A^3 можно получить проще, не прибегая к формуле (9,1): на отдельном листке бумаги написать матрицу A и этот листок приставлять поочередно к матрице A и A^2, составляя сумму произведений элементов первой строки этих матриц на соответствующие столбцы «приставной» матрицы.

2. Составляем определитель вида (9,2)

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 5 & 1 & 4 \\ \lambda^2 & 52 & 16 & 62 \\ \lambda^3 & 680 & 224 & 860 \end{vmatrix} \to \text{(первая строка заданной матрицы)}$$

3. Теперь разделим элементы каждого столбца, начиная с третьего, на верхние их элементы, находящиеся во второй строке:

$$D(\lambda) = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 5 & 1 & 1 \\ \lambda^2 & 52 & 16 & \frac{62}{4} \\ \lambda^3 & 680 & 224 & \frac{860}{4} \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 5 & 1 & 1 \\ \lambda^2 & 52 & 16 & \frac{31}{2} \\ \lambda^3 & 680 & 224 & 215 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов четвертого столбца соответствующие элементы третьего. Получится определитель

$$D(\lambda)=4\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ \lambda & 5 & 1 & 1-1\\ \lambda^2 & 52 & 16 & \frac{31}{2}-16\\ \lambda^3 & 680 & 224 & 215-224\end{vmatrix}=4\times$$

$$\times\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ \lambda & 5 & 1 & 0\\ \lambda^2 & 52 & 16 & -\frac{1}{2}\\ \lambda^3 & 680 & 224 & -9\end{vmatrix}.$$

Теперь разделим все элементы четвертого столбца на $-\frac{1}{2}$:

$$D(\lambda)=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ \lambda & 5 & 1 & 0\\ \lambda^2 & 52 & 16 & 1\\ \lambda^3 & 680 & 224 & 18\end{vmatrix}.$$

Еще раз напомним: последний элемент последнего столбца равен следу заданной матрицы, т. е. сумме ее диагональных элементов, а предпоследний элемент должен быть равен 1. Раскроем этот определитель по элементам первого столбца, начиная с его последнего элемента.

$$D(\lambda)=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{-\lambda^3\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 0\\ 52 & 16 & 1\end{vmatrix}+\lambda^2\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 1\\ 680 & 224 & 18\end{vmatrix}-\right.$$

$$\left.-\lambda\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 52 & 16 & 1\\ 680 & 224 & 18\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}5 & 1 & 0\\ 52 & 16 & 1\\ 680 & 224 & 18\end{vmatrix}\right\}.$$

1. Определитель при λ^3 равен

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 0\\ 52 & 16 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 16 & 1\end{vmatrix}=1.$$

(Напомним, что если все элементы какого-либо ряда определителя, кроме одного, равны нулю, то определитель равен произведению этого, не равного нулю элемента, на его алгебраическое дополнение).

2. Определитель при λ^2

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 680 & 224 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 224 & 18 \end{vmatrix} = 18.$$

3. Определитель при λ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 52 & 16 & 1 \\ 680 & 224 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 1 \\ 224 & 18 \end{vmatrix} = 64$$

4. Свободный член

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 52 & 16 & 1 \\ 680 & 224 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -28 & 16 & 1 \\ -440 & 224 & 18 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -28 & 1 \\ -440 & 18 \end{vmatrix} = -(-64) = 64.$$

Таким образом,

$$D(\lambda) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(-\lambda^3 + 18\lambda^2 + 64\lambda + 64).$$

Характеристическое уравнение запишется так:

$$D(\lambda) = 0$$

или

$$4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(-\lambda^3 + 18\lambda^2 + 64\lambda + 64) = 0.$$

Сокращая на множитель $4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$ и умножая обе части уравнения на -1, получим окончательно

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 - 64\lambda - 64 = 0.$$

Это же уравнение было найдено в задаче 8,1.

Задача 9,2. Найти методом академика А. Н. Крылова характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Решение. Эта матрица нам уже встречалась в задаче 8,2.

1. Находим первые строки ее степеней A^2 и A^3, пользуясь фор-

мулой (9,1) или приставной табличкой (это в данном случае, пожалуй, проще)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 161 & -134 & 58 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{bmatrix};$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2691 & -2538 & 1206 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{bmatrix}.$$

2. Составляем определитель вида (9,2)

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 11 & -6 & 2 \\ \lambda^2 & 161 & -134 & 58 \\ \lambda^3 & 2691 & -2538 & 1206 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \to \text{первая строка} \\ \text{матрицы } A \\ \\ \end{matrix}$$

3. Разделим элементы третьего столбца на элемент -6, а элементы четвертого столбца на 2, в результате чего определитель

$$D(\lambda) = -6 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 11 & 1 & 1 \\ \lambda^2 & 161 & \frac{67}{3} & 29 \\ \lambda^3 & 2691 & 423 & 603 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов четвертого столбца соответствующие элементы третьего столбца. Тогда

$$D(\lambda) = -6 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 11 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 161 & \frac{67}{3} & 29 - \frac{67}{3} \\ \lambda^3 & 2691 & 423 & 603 - 423 \end{vmatrix} =$$

$$= -6 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 11 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 161 & \frac{67}{3} & \frac{20}{3} \\ \lambda^3 & 2691 & 423 & 180 \end{vmatrix}.$$

Разделим элементы четвертого столбца на $\frac{20}{3}$:

$$D(\lambda) = -6 \cdot 2 \cdot \frac{20}{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 11 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 161 & \frac{67}{3} & 1 \\ \lambda^3 & 2691 & 423 & 27 \end{vmatrix}.$$

Контроль: Последний элемент в последнем столбце равен следу матрицы A.

Разлагаем этот определитель по элементам первого столбца, начиная с его последнего элемента

$$D(\lambda) = -6 \cdot 2 \cdot \frac{20}{3} \left\{ -\lambda^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 \\ 161 & \frac{67}{3} & 1 \end{vmatrix} + \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 \\ 2691 & 423 & 27 \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 161 & \frac{67}{3} & 1 \\ 2691 & 423 & 27 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 11 & 1 & 0 \\ 161 & \frac{67}{3} & 1 \\ 2691 & 423 & 27 \end{vmatrix} \right\}.$$

Определитель при λ^3

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 \\ 161 & \frac{67}{3} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{67}{3} & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Определитель при λ^2

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 \\ 2691 & 423 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 423 & 27 \end{vmatrix} = 27.$$

Определитель при λ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 161 & \frac{67}{3} & 1 \\ 2691 & 423 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{67}{3} & 1 \\ 423 & 27 \end{vmatrix} = 180.$$

Свободный член

$$\begin{vmatrix} 11 & 1 & 0 \\ 161 & \frac{67}{3} & 1 \\ 2691 & 423 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{254}{3} & \frac{67}{3} & 1 \\ -1962 & 423 & 27 \end{vmatrix} =$$

(к элементам первого столбца прибавлены элементы второго столбца, умноженные на -11)

$$= - \begin{vmatrix} -\frac{254}{3} & 1 \\ -1962 & 27 \end{vmatrix} = -(-324) = 324.$$

Таким образом, приравнивая $D(\lambda)$, нулю, получаем характеристическое уравнение для матрицы A

$$D(\lambda) = -6 \cdot 2 \cdot \frac{20}{3}(-\lambda^3 + 27\lambda^2 - 180\lambda + 324) = 0,$$

или окончательно

$$\lambda^3 - 27\lambda^2 + 180\lambda - 324 = 0.$$

Такое же уравнение найдено и в решении задачи 8,2.

Задача 9,3. Методом академика Крылова найти характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. С этой матрицей мы встречались в задаче 8,3.

1. Определим первые строки ее степеней A^2 и A^3, пользуясь формулой приведения (9,1) или «приставной» матрицей

$$A^2 = \begin{bmatrix} 49 & 40 & 20 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix};$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 454 & 427 & 198 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

2. Составляем определитель вида (9,2)

$$D\lambda = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 6 & 3 & 2 \\ \lambda^2 & 49 & 40 & 20 \\ \lambda^3 & 454 & 427 & 198 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \to \text{первая строка} \\ \text{матрицы } A \\ \\ \end{matrix}$$

3. Разделим все элементы третьего столбца на 3 (верхний элемент этого столбца в его второй строке), а элементы четвертого на 2 (верхний элемент во второй строке этого столбца):

$$D(\lambda) = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 6 & 1 & 1 \\ \lambda^2 & 49 & \frac{40}{3} & 10 \\ \lambda^3 & 454 & \frac{427}{3} & 99 \end{vmatrix}.$$

Теперь из элементов четвертого столбца вычтем соответствующие элементы третьего столбца

$$D(\lambda) = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 6 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 49 & \frac{40}{3} & -\frac{10}{3} \\ \lambda^3 & 454 & \frac{427}{3} & -\frac{130}{3} \end{vmatrix}.$$

Разделим все элементы четвертого столбца на элемент $-\frac{10}{3}$ и получим

$$D(\lambda) = 3 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 6 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 49 & \frac{40}{3} & 1 \\ \lambda^3 & 454 & \frac{427}{3} & 13 \end{vmatrix}.$$

Разлагаем этот определитель по элементам первого столбца, начиная с его последнего элемента,

$$D(\lambda) = 3 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) \cdot \left\{-\lambda^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 49 & \frac{40}{3} & 1 \end{vmatrix} + \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 454 & \frac{427}{3} & 13 \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 49 & \frac{40}{3} & 1 \\ 454 & \frac{427}{3} & 13 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 49 & \frac{40}{3} & 1 \\ 454 & \frac{427}{3} & 13 \end{vmatrix} \right\}.$$

Определитель при λ^3

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 49 & \frac{40}{3} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{40}{3} & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Определитель при λ^2

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 454 & \frac{427}{3} & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{427}{3} & 13 \end{vmatrix} = 13.$$

Определитель при λ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 49 & \frac{40}{3} & 1 \\ 454 & \frac{427}{3} & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{40}{3} & 1 \\ \frac{427}{3} & 13 \end{vmatrix} = 31.$$

Свободный член

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 49 & \frac{40}{3} & 1 \\ 454 & \frac{427}{3} & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -31 & \frac{40}{3} & 1 \\ -400 & \frac{427}{3} & 13 \end{vmatrix} =$$

(элементы второго столбца умножены на -6 и прибавлены к элементам первого столбца)

$$= -\begin{vmatrix} -31 & 1 \\ -400 & 13 \end{vmatrix} = -(-3) = 3.$$

Подставляя эти значения определителей в $D(\lambda)$ и приравнивая нулю полученное выражение, находим характеристическое уравнение

$$D(\lambda) = 3 \cdot 2\left(-\frac{10}{3}\right)(-\lambda^3 + 13\lambda^2 - 31\lambda + 3) = 0$$

и окончательно

$$\lambda^3 - 13\lambda^2 + 31\lambda - 3 = 0.$$

Это же уравнение было получено в задаче 8,3.

Задача 9,4 (для самостоятельного решения). Методом академика Крылова найти характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ответ. $\lambda^3 - 10\lambda^2 + 24\lambda - 16 = 0$ (см. задачу 8,4).

Задача 9,5 (для самостоятельного решения). Найти методом академика Крылова характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Промежуточные результаты:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 45 & 16 & 34 & 39 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix};$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 510 & 200 & 404 & 498 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix};$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 6060 & 2416 & 4840 & 6036 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

2. Определитель (9,2) имеет вид

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 5 & 1 & 3 & 2 \\ \lambda^2 & 45 & 16 & 34 & 39 \\ \lambda^3 & 510 & 200 & 404 & 498 \\ \lambda^4 & 6060 & 2416 & 4840 & 6036 \end{vmatrix}.$$

Ответ. $\lambda^4 - 16\lambda^3 + 52\lambda^2 - 48\lambda = 0$.

Задача 9,6 (для самостоятельного решения). Найти методом академика Крылова характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

и ее собственные значения.

Промежуточные результаты:

Первая строка в матрице A^2

55 80 81 64 35.

Первая строка в матрице A^3

1001 1672 1863 1568 889.

Первая строка в матрице A^4

21307 36608 41877 35968 20651.

Первая строка в матрице A^5

471185 814528 938223 810656 467281.

Определитель (9,2)

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \lambda^2 & 55 & 80 & 81 & 64 & 35 \\ \lambda^3 & 1001 & 1672 & 1863 & 1568 & 889 \\ \lambda^4 & 21307 & 36608 & 41877 & 35968 & 20651 \\ \lambda^5 & 471185 & 814528 & 938223 & 810656 & 467281 \end{vmatrix}.$$

После преобразования по указанной схеме получится характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 55 & 20 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda^3 & 1001 & 418 & 29 & 1 & 0 \\ \lambda^4 & 21307 & 9152 & \frac{4807}{7} & \frac{230}{7} & 1 \\ \lambda^5 & 471185 & 203632 & 15587 & 814 & 35 \end{vmatrix}=0.$$

После разложения этого определителя по элементам первого столбца и вычисления определителей при степенях λ это уравнение примет вид

$$\lambda^5-35\lambda^4+336\lambda^3-1296\lambda^2+2160\lambda-1296=0.$$

Его корни — собственные значения матрицы A

$$\lambda_1=2;\quad \lambda_2=3;\quad \lambda_3=6;\quad \lambda_4=12+6\sqrt{3};\quad \lambda_5=12-6\sqrt{3}.$$

Задача 9,7 (для самостоятельного решения) Методом Крылова найти характеристическое уравнение матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

и ее собственные значения

Ответ. $\lambda^3-4\lambda^2+\lambda+6=0;$

$$\lambda_1=-1;\quad \lambda_2=2;\quad \lambda_3=3.$$

Задача 9,8. Методом Крылова найти характеристическое уравнение матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 48 & -28 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

и ее собственные значения.

Ответ. $\lambda^4 - 7\lambda^3 + 8\lambda^2 + 28\lambda - 48 = 0$;

$$\lambda_1 = -2;\ \lambda_2 = 2;\ \lambda_3 = 3;\ \lambda_4 = 4.$$

II. ТЕОРЕМА КЭЛИ-ГАМИЛЬТОНА.

Теорема Кэли-Гамильтона в матричном исчислении является одной из важнейших. Вот ее формулировка:

Каждая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению, которое следует понимать в матричном смысле.

Объясним это.

Если для матрицы A характеристическое уравнение имеет вид (8,7)

$$(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} A_1\lambda^{n-1} + (-1)^{n-2} A_2\lambda^{n-2} + \cdots + \\ + (-1) A_{n-1} \lambda + A_n = 0,$$

то получается матричное равенство

$$(-1)^n A^n + (-1)^{n-1} A_1A^{n-1} + (-1)^{n-2}A_2A^{n-2} + \cdots + \\ + (-1) A_{n-1} A + A_nE = 0, \qquad (9,11)$$

где E — единичная матрица того же порядка, что и A, а 0 — нулевая матрица.

Определение обратной матрицы при помощи теоремы Кэли-Гамильтона

Если A — невырожденная матрица, то равенство (9,11) позволяет найти A^{-1} — матрицу, обратную A.

Умножим (9,11) слева на A^{-1}:

$$(-1)^n A^{n-1} + (-1)^{n-1} A_1A^{n-2} + \cdots + (-1)A_{n-1}A^{-1}A + A_nA^{-1}E = 0$$

Отсюда, учитывая, что $A^{-1}A = E$, получим

$$A^{-1} = -\frac{1}{A_n}[(-1)^n A^{n-2} + (-1)^{n-1}A_1A^{n-2} + \cdots + (-1)A_{n-1}E]. \quad (9,12).$$

Эта формула дает удобный практический метод вычисления обратной матрицы, так как определить коэффициенты A_1, A_2 A_3, ..., A_n характеристического уравнения можно по формулам (8,9).

Задача 9,9. Доказать, что матрица

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

удовлетворяет своему характеристическому уравнению

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 64\lambda - 64 = 0$$

(см. задачу 9,1).

Решение. Заменим в левой части характеристического уравнения λ на матрицу A:

$$A^3 \quad -18A^2 \quad +64A \quad -64E \tag{9,13}$$

или

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}^3 - 18 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}^2 + 64 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix} - 64 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E}.$$

Убедимся, что это выражение равно нулевой матрице.

Найдем сначала квадрат, а потом куб матрицы A

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 & 16 & 62 \\ 36 & 16 & 38 \\ 96 & 32 & 128 \end{bmatrix};$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 52 & 16 & 62 \\ 36 & 16 & 38 \\ 96 & 32 & 128 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 680 & 224 & 860 \\ 456 & 160 & 556 \\ 1344 & 448 & 1728 \end{bmatrix}.$$

Подставляем полученные степени матрицы A в выражение (9,13) и убедимся, что оно обратится в нулевую матрицу

$$\begin{bmatrix} 680 & 224 & 860 \\ 456 & 160 & 556 \\ 1344 & 448 & 1728 \end{bmatrix} - 18 \cdot \begin{bmatrix} 52 & 16 & 62 \\ 36 & 16 & 38 \\ 96 & 32 & 128 \end{bmatrix} -$$

$$+ 64 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix} - 64 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 680 & 224 & 860 \\ 456 & 160 & 556 \\ 1344 & 448 & 1728 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 936 & 288 & 1116 \\ 648 & 288 & 684 \\ 1728 & 576 & 2304 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 320 & 64 & 256 \\ 192 & 192 & 128 \\ 384 & 128 & 640 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задача 9,10. Найти матрицу, обратную матрице A предыдущей задачи.

Решение. Характеристическим уравнением матрицы A является уравнение

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 64\lambda - 64 = 0$$

(см. задачу 8,1).

На основании теоремы Кэли-Гамильтона матрица A удовлетворяет этому характеристическому уравнению. Поэтому

$$A^3 - 18A^2 + 64A - 64E = 0.$$

Умножая, как это делалось при выводе формулы (9,12), обе части этого уравнения на A^{-1}, получим

$$A^{-1} \cdot A^3 - 18A^{-1} \cdot A^2 + 64A^{-1} \cdot A - 64A^{-1} \cdot E = 0,$$

откуда

$$A^2 - 18A + 64E = 64A^{-1},$$

а

$$A^{-1} = \frac{1}{64}(A^2 - 18A + 64E)$$

Матрица A^2 уже была найдена в предыдущей задаче

$$A^2 = \begin{bmatrix} 52 & 16 & 62 \\ 36 & 16 & 38 \\ 96 & 32 & 128 \end{bmatrix}.$$

Поэтому обратная к A матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{64}\left\{\begin{bmatrix} 52 & 16 & 62 \\ 36 & 16 & 38 \\ 96 & 32 & 128 \end{bmatrix} - 18 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix} + 64 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{64}\left\{\begin{bmatrix} 52 & 16 & 62 \\ 36 & 16 & 38 \\ 96 & 32 & 128 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 90 & 18 & 72 \\ 54 & 54 & 36 \\ 108 & 36 & 180 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 26 & -2 & -10 \\ -18 & 26 & 2 \\ -12 & -4 & 12 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{64} \cdot \begin{bmatrix} 26 & -2 & -10 \\ -18 & 26 & 2 \\ -12 & -4 & 12 \end{bmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{32} \cdot \begin{bmatrix} 13 & -1 & -5 \\ -9 & 13 & 1 \\ -6 & -2 & 6 \end{bmatrix};$$

Проверка:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{32}\cdot\begin{bmatrix}13 & -1 & -5\\ -9 & 13 & 1\\ -6 & -2 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & 1 & 4\\ 3 & 3 & 2\\ 6 & 2 & 10\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=E.$$

Заметим, что формула Кэли-Гамильтона позволяет, зная $(n-1)$-ую степень матрицы A, найти ее n-ую степень, учитывая, что коэффициенты характеристического уравнения легко вычисляются по формулам (8,9).

Так, из характеристического уравнения задачи 9,9

$$\lambda^3-18\lambda^2+64\lambda-64=0$$

на основании теоремы Кэли-Гамильтона следует

$$A^3-18A^2+64A-64E=0,$$

откуда

$$A^3=18A^2-64A+64E.$$

Действительно, легко проверить, что найденное раньше значение (см. задачу 9,9)

$$A^3=18\cdot\begin{bmatrix}52 & 16 & 62\\ 36 & 16 & 38\\ 96 & 32 & 128\end{bmatrix}-64\cdot\begin{bmatrix}5 & 1 & 4\\ 3 & 3 & 2\\ 6 & 2 & 10\end{bmatrix}+64\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Убедитесь, что это выражение равно матрице

$$A^3=\begin{bmatrix}680 & 224 & 860\\ 456 & 160 & 556\\ 1344 & 448 & 1728\end{bmatrix}.$$

Задача 9,11 (для самостоятельного решения). Доказать, что матрица

$$A=\begin{bmatrix}11 & -6 & 2\\ -6 & 10 & -4\\ 2 & -4 & 6\end{bmatrix}$$

удовлетворяет своему характеристическому уравнению

$$\lambda^3-27\lambda^2+180\lambda-324=0$$

и найти матрицу A^{-1}, обратную матрице A.

Ответ.

$$A^{-1}=\frac{1}{324}\cdot\begin{bmatrix}44 & 28 & 4\\ 28 & 62 & 32\\ 4 & 32 & 74\end{bmatrix}.$$

Задача 9,12 (для самостоятельного решения). Для матрицы

$$A=\begin{bmatrix}6 & 3 & 2\\ 3 & 6 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix},$$

характеристическим уравнением является

$$\lambda^3-13\lambda^2+13\lambda-3=0.$$

Найти A^3 и A^{-1}.

Указание. На основании теоремы Кэли-Гамильтона матрица A удовлетворяет своему характеристическому уравнению, т. е. имеет место равенство

$$A^3-13A^2+31A-3E=0.$$

Отсюда

$$A^3=13A^2-31A+3E,$$

а на основании формулы (9,12)

$$A^{-1}=\frac{1}{3}(A^2-13A+31E).$$

Ответ.

$$A^3=\begin{bmatrix}454 & 427 & 198\\ 427 & 454 & 198\\ 198 & 198 & 89\end{bmatrix};\qquad A^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1 & -6\\ 1 & 2 & -6\\ -6 & -6 & 27\end{bmatrix}.$$

Задача 9,13 (для самостоятельного решения). Для матрицы

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

характеристическим является уравнение

$$\lambda^3-10\lambda^2+24\lambda-16=0.$$

Убедиться, что эта матрица удовлетворяет этому характеристическому уравнению. Определить обратную матрицу A^{-1} и найти A^3.

Ответ. $A^{-1}=\frac{1}{16}(A^2-10A+24E)$;

$$A^{-1}=\frac{1}{16}\cdot\begin{bmatrix}8 & -4 & 0\\ -4 & 8 & -4\\ 0 & -4 & 8\end{bmatrix};$$

$$A^3 = 10A^2 - 24A + 16E;$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 84 & 112 & 76 \\ 112 & 160 & 112 \\ 76 & 112 & 84 \end{bmatrix}.$$

Задача 9,14 (для самостоятельного решения). Найти характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

ее собственные значения и, пользуясь теоремой Кэли-Гамильтона, обратную ей матрицу A^{-1}

Ответ. 1) $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 = 0$;

2) $\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = -3$;

3) $A^{-1} = -\frac{1}{27}(A^2 - 3A - 9E)$

$$A^{-1} = -\frac{1}{27} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

Содержание. Применение матриц к приведению квадратичной формы двух переменных к сумме квадратов (к каноническому виду). Упрощение уравнений кривых второго порядка.

СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Упрощениями уравнений кривых второго порядка мы уже занимались в первой части этой книги на четырнадцатом практическом занятии. Сейчас возвратимся к этому вопросу и покажем, что привлечение матричного исчисления к решению этой задачи значительно облегчит его.

Прежде всего кратко изложим теорию приведения квадратичной формы двух переменных к сумме квадратов, к так называемому каноническому виду, и полученные выводы применим к упрощению общего уравнения кривой второго порядка.

КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ И ПРИВЕДЕНИЕ ЕЕ К СУММЕ КВАДРАТОВ (К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ).

Квадратичной формой двух переменных называется выражение вида

$$F(x_1,\ x_2) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} a_{ij}x_ix_j. \qquad (10,1)$$

В развернутом виде оно записывается так:

$$F(x_1,\ x_2) = \sum_{j=1}^{2}(a_{1j}x_1x_j + a_{2j}x_2x_j) =$$

$$= a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2.$$

Окончательно

$$F(x_1,\ x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2. \qquad (10,2)$$

Если окажется, что коэффициенты a_{12} и a_{21} при произведении x_1x_2 равны между собой, т. е. $a_{21} = a_{12}$, то формула (10,2) примет вид

$$F(x_1,\ x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2. \qquad (10,2_1)$$

С таким видом квадратичной формы мы будем встречаться при решении задач. Легко проверить, что выражение (10,2) может быть записано в виде произведения трех матриц

$$F(x_1, x_2) = [x_1, x_2] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \qquad (10,3)$$

Введем такие обозначения:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad (10,4)$$

A — матрица коэффициентов квадратичной формы.

Если квадратичная форма имеет вид (10,2), то матрица ее коэффициентов будет симметричной и запишется так:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}. \qquad (10,4_1)$$

Таким образом, элементы, стоящие на второй диагонали, равны между собой и каждый из них равен половине коэффициента при произведении x_1x_2 в квадратичной форме $(10,2_1)$. Именно в таком виде $(10,4_1)$ мы и будем применять матрицу A коэффициентов квадратичной формы при решении задач. Обозначим

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \qquad (10,5)$$

$$X' = [x_1 \quad x_2] \qquad (10,6)$$

(матрица X' является транспонированной матрицей X).

Выражение (10,3) с этими обозначениями запишется так:

$$F(x_1, x_2) = X'AX. \qquad (10,7)$$

Задача состоит в том, чтобы выражение $(10,2_1)$ или, что то же, выражение (10,7) представить в виде суммы квадратов. В этом виде оно не должно содержать члена с произведением переменных x_1 и x_2. Преобразуем это выражение к новым переменным x_1' и x_2' так, чтобы оно приняло вид

$$F(x_1', x_2') = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2, \qquad (10,8)$$

причем может оказаться, что один из коэффициентов λ_1 или λ_2 будет равен нулю. Это выражение, как легко проверить, можно представить в виде произведения трех матриц

$$F(x_1', x_2') = [x_1' \quad x_2'] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}, \qquad (10,9)$$

или, введя обозначения

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}; \tag{10,10}$$

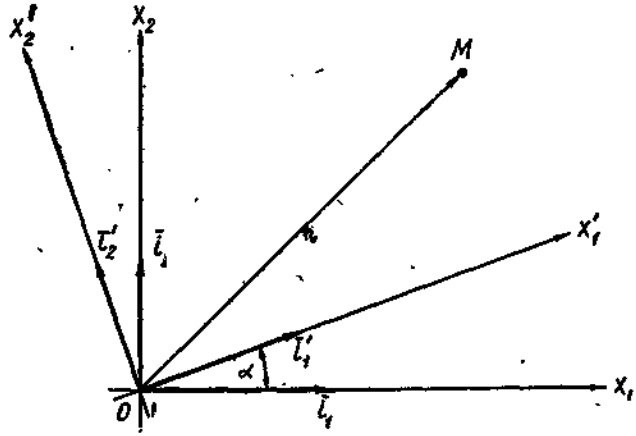
$$X'^* = [x_1' \quad x_2']; \tag{10,11}$$

$$L = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \tag{10,12}$$

получим

$$F(x_1', x_2') = X'^* L X^*. \tag{10,13}$$

Таким образом, задача сводится к определению коэффициентов λ_1 и λ_2 в выражении (10,8).



Фиг. 10,1

Перейдем к геометрическому истолкованию этого преобразования. Будем рассматривать переменные x_1 и x_2 как координаты точки M на плоскости в системе прямоугольных координат (x_1, x_2): ось Ox_1 — ось абсцисс, а ось Ox_2 — ось ординат. Сохраняя без изменений начало координат, повернем систему координат x_1Ox_2 на некоторый угол α. Мы получим новую систему координат, которую обозначим $x_1'Ox_2'$, а координаты точки M в новой системе координат — через x_1' и x_2' (фиг. 10,1).

Единичные векторы осей первоначальной системы координат назовем $\bar{i}$ и $\bar{j}$, а новой системы координат — соответственно $\bar{i}_1$ и $\bar{j}_1$. Обозначим

$$\cos(\bar{i}, \widehat{\;\bar{i}_1}) = \cos\alpha = l_{11}; \quad \cos(\bar{i}, \widehat{\;\bar{j}_1}) = \cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha = l_{12};$$

$$\cos(\bar{j}, \widehat{\;\bar{i}_1}) = \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha = l_{21}; \quad \cos(\bar{j}, \widehat{\;\bar{j}_1}) = \cos\alpha = l_{22}. \tag{10,14}$$

Радиус-вектор точки $M(x_1, x_2)$ в первоначальной системе координат

$$\bar{r} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j},$$

а в новой системе координат

$$\bar{r} = x_1'\bar{i}_1 + x_2'\bar{j}_1,$$

поэтому

$$x_1\bar{i} + x_2\bar{j} = x_1'\bar{i}_1 + x_2'\bar{j}_1. \qquad (10,15)$$

Умножая обе части этого равенства сначала на $\bar{i}$, а потом на $\bar{j}$, учитывая также, что скалярное произведение двух векторов равно произведению их модулей на косинус угла между ними, принимая во внимание обозначения (10,14) и то, что модуль орта равен единице, зная, что для скалярных произведений ортов осей прямоугольной системы координат имеют место равенства

$$\bar{i}_k \cdot \bar{j}_p = \begin{cases} 0, \text{ если } k \neq p \\ 1, \text{ если } k = p, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1'l_{11} + x_2'l_{12}; \\ x_2 &= x_1'l_{21} + x_2'l_{22}. \end{aligned} \qquad (10,16)$$

Эти формулы выражают первоначальные координаты x_1 и x_2 точки через ее новые координаты x_1' и x_2'. В матричном виде эти формулы выглядят так:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}. \qquad (10,17)$$

Учитывая уже введенные обозначения (10,5) и (10,10) и вводя обозначение

$$S = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}, \qquad (10,18)$$

формулы (10,17) перепишем в виде

$$X = SX^*. \qquad (10,19)$$

Матрица S называется матрицей преобразования. Заметим, что, как это следует на основании (10,14), она ортонормирована. Действительно,

$$\begin{aligned} l_{11}l_{12} + l_{21}l_{22} = 0; \quad l_{11}^2 + l_{21}^2 = 1; \\ l_{11}l_{21} + l_{12}l_{22} = 0; \quad l_{12}^2 + l_{22}^2 = 1. \end{aligned}$$

Из этого вытекает, что транспонированная к ней матрица

$$S' = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ l_{12} & l_{22} \end{bmatrix}$$

является для нее и обратной, т. е.

$$S' = S^{-1} \tag{10,20}$$

(убедитесь, что $SS' = E$).

Умножив обе части формулы (10,19) слева на S^{-1}, получим

$$S^{-1}X = S^{-1}SX^*,$$

или, читая справа налево,

$$X^* = S^{-1}X. \tag{10,21}$$

Для перехода от новых координат x_1' и x_2' точки M к ее первоначальным координатам надо уравнения (10,16) решить относительно x_1' и x_2'. Это легко сделать, умножив скалярно обе части равенства (10,15) сначала на $\bar{i}_1$, а потом на $\bar{j}_1$. Учитывая замечание относительно скалярного произведения ортов осей прямоугольной системы координат (стр. 240) и прочитывая полученные равенства справа налево, получим

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 l_{11} + x_2 l_{21}; \\ x_2' &= x_1 l_{12} + x_2 l_{22}. \end{aligned} \tag{10,22}$$

Эти формулы выражают новые координаты x_1' и x_2' точки M через ее первоначальные координаты.

В матричном виде они запишутся так:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ l_{12} & l_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{10,23}$$

Но матрица

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ l_{12} & l_{22} \end{bmatrix}$$

по отношению к матрице S (10,18) является транспонированной, а поэтому она равна S', а на основании (10,20) она равна S^{-1}. Поэтому формула (10,23) совпадает с ранее полученной формулой (10,21)

$$X^* = S^{-1}X.$$

Легко проверить, что наряду с (10,21) имеет место и равенство

$$X'^* = X'S, \tag{10,24}$$

а с равенством (10,19) — равенство

$$X' = X'^*S^{-1}. \tag{10,25}$$

Теперь уже мы можем от старых переменных перейти к новым, для чего заменим в (10,7) X' по формуле (10,25), а X — по формуле (10,19). В новых переменных x_1' и x_2' функция $F(x_1, x_2)$ запишется так:

$$F(x_1', x_2') = X'^*S^{-1}ASX^*. \tag{10,26}$$

Если обозначить

$$S^{-1}AS = A^*, \qquad (10,27)$$

то

$$F(x_1', x_2') = X'^*A^*X^*.$$

Сравнивая это выражение с выражением (10,13), приходим к выводу, что

$$A^* = L,$$

т. е. на основании (10,27)

$$S^{-1}AS = L.$$

Если это равенство умножить слева на S, то

$$SS^{-1}AS = SL,$$

или

$$AS = SL. \qquad (10,28)$$

Из этого матричного уравнения должны быть определены элементы матрицы L, т. е. величины λ_1 и λ_2, а также элементы матрицы S, т. е. величины l_{11}, l_{12}, l_{21} и l_{22}.

Выполним умножение в левой и правой частях (10,28), учитывая (10,4), (10,12) и (10,18),

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует:

$$\begin{bmatrix} a_{11}l_{11} + a_{12}l_{21} & a_{11}l_{12} + a_{12}l_{22} \\ a_{21}l_{11} + a_{22}l_{21} & a_{21}l_{12} + a_{22}l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}\lambda_1 & l_{12}\lambda_2 \\ l_{21}\lambda_1 & l_{22}\lambda_2 \end{bmatrix}.$$

На основании условия о равенстве двух матриц получаем

$$\left.\begin{aligned} a_{11}l_{11} + a_{12}l_{21} &= l_{11}\lambda_1; \\ a_{21}l_{11} + a_{22}l_{21} &= l_{21}\lambda_1. \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} a_{11}l_{12} + a_{12}l_{22} &= l_{12}\lambda_2; \\ a_{21}l_{12} + a_{22}l_{22} &= l_{22}\lambda_2. \end{aligned}\right\}$$

Эти две системы уравнений перепишем:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_1)\, l_{11} + a_{12}l_{21} &= 0; & (a_{11} - \lambda_2)\, l_{12} + a_{12}l_{22} &= 0; \\ a_{21}l_{11} + (a_{22} - \lambda_1)\, l_{21} &= 0; & a_{21}l_{12} + (a_{22} - \lambda_2)\, l_{22} &= 0. \end{aligned} \qquad (10,29)$$

Запишем их и в виде одной системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_i)\, l_{1i} + a_{12}l_{2i} &= 0 \\ a_{21}l_{1i} + (a_{22} - \lambda_i) l_{2i} &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (10,30)$$

в которой индекс i может принимать значения 1 и 2.

Эта система является системой двух линейных однородных уравнений. Для того чтобы она имела не тривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т. е. чтобы

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (10,31)$$

(индекс i у λ мы опустили).

Нетрудно видеть, что уравнение (10,31) есть характеристическое уравнение матрицы A. Раскрыв определитель (10,31), получим квадратное уравнение, решив которое, определим λ_1 и λ_2, т. е. собственные значения матрицы A. Подставляя поочередно эти значения λ в систему (10,30), найдем элементы l_{11}, l_{21}, l_{12}, l_{22} матрицы преобразования S. После того как определены λ_1 и λ_2, преобразование квадратичной формы к каноническому виду можно считать законченным. Элементы матрицы S необходимы для того, чтобы по формулам (10,16) выразить первоначальные координаты x_1 и x_2 через новые координаты x_1' и x_2'.

Заметим, что, решая квадратное уравнение относительно λ, можно встретиться с тремя случаями: 1) λ_1 и λ_2 различны; 2) $\lambda_1 = \lambda_2$; 3) какое-нибудь из этих значений равно нулю.

Задача 10,1. Преобразовать к каноническому виду уравнение

$$5x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 = 24.$$

Решение. Матрица коэффициентов A в формуле (10,4) в данном случае имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix},$$

а характеристическое уравнение (10,31) запишется так:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$(5-\lambda)(2-\lambda)-4=0,$$

т. е.

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$
$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 6.$$

Возникает вопрос — какому из найденных значений λ приписать значение λ_1, а какому λ_2? Условимся так нумеровать значения λ, чтобы угол поворота α координатных осей x_1Ox_2 был острым, т. е. так, чтобы выполнялось неравенство $\operatorname{tg}\alpha > 0$. В матрицу S формулы (10,18) входят элементы l_{11}, l_{21} и l_{12}, l_{22}. На основании формул (10,14)

$$l_{11} = \cos\alpha; \quad l_{12} = -\sin\alpha$$
$$l_{21} = \sin\alpha; \quad l_{22} = \cos\alpha,$$

а потому

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{l_{21}}{l_{11}}, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{l_{12}}{l_{22}}. \tag{10,32}$$

Пользуясь системами (10,29), надо так пронумеровать λ, чтобы отношения

$$\frac{l_{21}}{l_{11}} \text{ и } -\frac{l_{12}}{l_{22}}$$

были положительными.

Примем сначала $\lambda_1 = 1$.

В первую систему (10,29) подставим $\lambda_1 = 1$. Учитывая, что

$$a_{11} = 5; \quad a_{12} = -2; \quad a_{21} = -2; \quad (a_{12} = a_{21}); \quad a_{22} = 2,$$

получим

$$(5-1)\,l_{11} - 2l_{21} = 0;$$
$$-2l_{11} + (2-1)\,l_{21} = 0.$$

Отсюда

$$4l_{11} - 2l_{21} = 0;$$
$$-2l_{11} + l_{21} = 0.$$

Очевидно, что второе уравнение является следствием первого. Отбрасывая второе уравнение, имеем

$$4l_{11} - 2l_{21} = 0,$$

откуда

$$\frac{l_{21}}{l_{11}} = 2,$$

т. е. на основании (10,32) $\operatorname{tg}\alpha = 2 > 0$.

На этом положительном значении $\operatorname{tg}\alpha$ мы и остановимся и будем считать, что $\lambda_1 = 1$, а значит, $\lambda_2 = 6$. В дальнейшем нет надобности рассматривать два уравнения в каждой из систем (10,29), так как второе уравнение в них является следствием первого.

Если бы мы в качестве λ приняли $\lambda_1 = 6$, то с учетом значений a_{11}, a_{12}, a_{22} получили бы

$$(5-6)\,l_{11} - 2l_{21} = 0;$$
$$-l_{11} - 2l_{21} = 0,$$

откуда

$$\frac{l_{21}}{l_{11}} = -\frac{1}{2},$$

т. е. на основании (10,32) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$. Заметьте, что произведение найденных тангенсов равно -1. Так как при $\lambda_1 = 1$ мы получили $\operatorname{tg}\alpha > 0$, а при $\lambda_1 = 6$ оказалось, что $\operatorname{tg}\alpha < 0$, надо оставить именно эту нумерацию и взять

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 6.$$

В преобразованном виде заданное уравнение запишется так (формула 10,8):

$$x_1'^2 + 6x_2'^2 = 24.$$

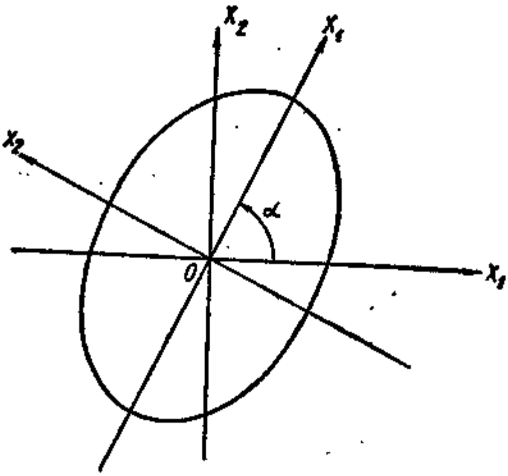
Оно определяет эллипс

$$\frac{x_1'^2}{24} + \frac{x_2'^2}{4} = 1$$

с полуосями

$$a = 2\sqrt{6}; \quad b = 2.$$

Из условия, что $\operatorname{tg} \alpha = 2$, мы определим и угол поворота.



К задаче 10,1

Задача 10,2 (для самостоятельного решения). Преобразовать к каноническому виду уравнение

$$11x^2 + 8xy + 5y^2 - 78 = 0.$$

Указание. В отличие от предыдущей задачи переменные здесь обозначены через x и y, а не через x_1 и x_2.

Корнями λ_1 и λ_2 характеристического уравнения являются числа 3 и 13. Чтобы выполнялось неравенство $\operatorname{tg} \alpha > 0$, надо занумеровать λ

$$\lambda_1 = 13; \quad \lambda_2 = 3.$$

Окажется, что

$$\frac{l_{21}}{l_{11}} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}.$$

Если бы взять $\lambda_1 = 3$, то

$$\operatorname{tg} \alpha = -2.$$

Заметьте, что произведение найденных тангенсов равно -1.

Ответ. Преобразованное уравнение имеет вид

$$13x_1^2+3y_1^2-78=0$$

или

$$\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{26}=1.$$

Кривая — эллипс с полуосями $a=\sqrt{6}$; $b=\sqrt{26}$.

Задача 10,3 (для самостоятельного решения). Упростить уравнение линии

$$13x^2+6xy+5y^2-56=0.$$

Указание. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix}13-\lambda & 3\\ 3 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Его корнями являются числа 4 и 14. Если принять, что $\lambda_1=4$, то

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{l_{21}}{l_{11}}=-3.$$

Если же $\lambda_1=14$, то $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$. Это значение $\operatorname{tg}\alpha$ определится из уравнения

$$-l_{11}+3l_{21}=0.$$

Ответ. В каноническом виде заданное уравнение запишется так:

$$14x_1^2+4y_1^2-56=0$$

или

$$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{14}=1.$$

Кривая — эллипс с полуосями $a=2$; $b=\sqrt{14}$.

Теперь решим несколько задач на упрощение общего уравнения кривой второго порядка.

Задача 10,4. Привести к простейшему виду уравнение линии

$$2x_1^2+10x_1x_2+2x_2^2+9x_1+12x_2-2=0.$$

Решение. Матрица коэффициентов квадратичной формы $2x_1^2+$ $+10x_1x_2+2x_2^2$, входящей в левую часть уравнения, запишется так:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & 2\end{bmatrix},$$

а характеристическое уравнение этой матрицы

$$\begin{bmatrix}2-\lambda & 5\\ 5 & 2-\lambda\end{bmatrix}=0.$$

Его корнями являются числа -3 и 7. Выясним, какое из них принять за λ_1, а какое — за λ_2. Для этого воспользуемся первым уравнением первой системы (10,29), полагая в нем $a_{11}=2$; $a_{12}=a_{21}=5$; $a_{22}=2$, $\lambda_1=-3$.

$$[2-(-3)]\,l_{11}+5l_{21}=0;\ 5l_{11}+5l_{21}=0;$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{l_{21}}{l_{11}}=-1.$$

Таким образом, если $\lambda_1=-3$, то $\operatorname{tg}\alpha<0$. Положим теперь, что $\lambda_1=7$. Тогда из того же уравнения

$$(2-7)\,l_{11}+5l_{21}=0;\ -5l_{11}+5l_{21}=0;\ l_{21}=l_{11};$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{l_{21}}{l_{11}}=1. \qquad (10,33)$$

На этом значении мы и остановимся, приняв, таким образом, что

$$\lambda_1=7;\ \lambda_2=-3.$$

Квадратичная форма $2x_1^2+10x_1x_2+2x_2^2$ приобретет вид

$$7x_1'^2-3x_2'^2. \qquad (10,34)$$

Чтобы определить все элементы матрицы преобразования S, нам осталось найти соотношение, связывающее l_{12} и l_{22}. Для этого воспользуемся первым уравнением второй системы в (10,29):

$$(a_{11}-\lambda_2)\,l_{12}+a_{12}l_{22}=0$$

или

$$[2-(-3)]\,l_{12}+5l_{22}=0;\ 5l_{12}+5l_{22}=0;$$
$$\frac{l_{12}}{l_{22}}=-1;\ l_{22}=-l_{12}.$$

Так как на основании (10,32)

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{l_{12}}{l_{22}},$$

то

$$\operatorname{tg}\alpha=1.$$

Таким образом, получилось прежнее значение для $\operatorname{tg}\alpha$ — см. (10,33).

С учетом найденных зависимостей между l_{21} и l_{11} и между l_{22} и l_{12} матрица преобразования

$$S=\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{11} & -l_{12}\end{bmatrix}. \qquad (10,35)$$

Но следует иметь в виду, что в формуле (10,18) матрица S является ортонормированной, как это было подчеркнуто на стр. 240 и использовано в последующем выводе. Поэтому и полученную при решении этой задачи матрицу S в формуле (10,35) надо привести к такому же виду, чтобы она стала матрицей преобразования.

Нормирующий множитель для элементов первого столбца

$$n_1 = \frac{1}{\pm\sqrt{l_{11}^2 + l_{21}^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{l_{11}^2 + l_{11}^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{2l_{11}^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{2}\,l_{11}};$$

нормирующий множитель для элементов второго столбца

$$n_2 = \frac{1}{\pm\sqrt{2}\,l_{12}}.$$

Теперь возникает вопрос, какой знак перед корнем в выражениях нормирующих множителей n_1 и n_2 должен быть выбран. Так как мы условились угол поворота α брать в первой четверти, то $\operatorname{tg}\alpha > 0$, $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha > 0$. Поэтому в матрице преобразования S элементы первого столбца $l_{11} = \cos\alpha$ и $l_{21} = \sin\alpha$ должны быть положительными: $l_{11} > 0$; $l_{21} > 0$. Во втором столбце элемент $l_{12} = -\sin\alpha$, а потому этот элемент должен быть отрицательным, ибо, если $-\sin\alpha < 0$, то $\sin\alpha > 0$ и второй элемент этого столбца $l_{22} = \cos\alpha$ и должен быть положительным. В связи с этим после нормирования матрицы S в формуле (10,35) следует взять у n_1 перед корнем знак плюс, а у n_2 — знак минус:

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\,l_{11}}; \quad n_2 = \frac{1}{-\sqrt{2}\,l_{11}}.$$

После этого мы можем преобразовать к новым осям и линейную часть заданного уравнения $9x_1 + 12x_2 - 2$. На основании формулы (10,19)

$$X = SX^*,$$

т. е. с учетом матрицы $S_{\text{норм}}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1' - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2' & 9 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2' & 12 \end{array}.$$

Отсюда

$$9x_1 + 12x_2 - 2 = \frac{21}{\sqrt{2}}x_1' + \frac{3}{\sqrt{2}}x_2' - 2.$$

Учитывая, что квадратичная форма в составе заданного уравнения приобрела вид (10,34), запишем его так:

$$7x_1'^2 - 3x_2'^2 + \frac{21\sqrt{2}}{2}x_1' + \frac{3\sqrt{2}}{2}x_2' - 2 = 0.$$

Выделим полные квадраты в левой его части, переписав уравнение:

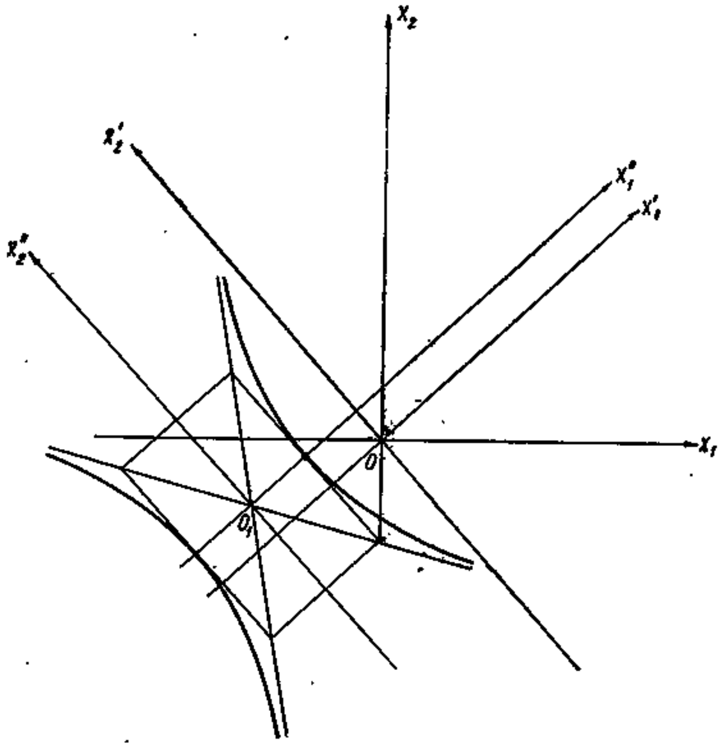
$$7\left(x_1'^2+\frac{3\sqrt{2}}{2}x_1'\right)-3\left(x_2'^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2'\right)-2=0;$$

$$7\left[\left(x_1'+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2-\frac{9}{8}\right]-3\left[\left(x_2'-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2-\frac{1}{8}\right]-2=0;$$

$$7\left(x_1'+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2-\frac{63}{8}-3\left(x_2'-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{3}{8}-2=0$$

или

$$7\left(x_1'+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2-3\left(x_2'-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{19}{2}.$$



К задаче 10,4

Теперь сделаем параллельный перенос координатных осей. Положим, что

$$x_1''=x_1'+\frac{3\sqrt{2}}{4};$$

$$x_2''=x_2'-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Из этих формул видно, что новое начало координат O_1 в системе координат $x_1'Ox_2'$ имеет абсциссу, равную $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$, и ординату, равную $\frac{\sqrt{2}}{4}$, т. е. $O_1\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ (см. формулу (12,12) преобразования координат при параллельном переносе координат в двенадцатом практическом занятии первой части этой книги). Уравнение (10,35) принимает вид

$$7x_1''^2 - 3x_1''^2 = \frac{19}{2}$$

или

$$\frac{x_1''^2}{\frac{19}{14}} - \frac{x_2''^2}{\frac{19}{6}} = 1.$$

Кривая — гипербола с полуосями

$$a = \sqrt{\frac{19}{14}};\ b = \sqrt{\frac{19}{6}}.$$

Первоначальная система координат x_1Ox_2 была повернута на угол α, тангенс которого на основании (10,33) равен 1, а сам угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$. В этой повернутой системе координат центр гиперболы находится в точке

$$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Задача 10,5. Упростить уравнение линии

$$12x^2 - 4xy - 15y^2 - 48x - 168y + 400 = 0.$$

Решение. Матрица коэффициентов квадратичной формы $12x^2 - 4xy + 15y^2$, входящей в уравнение,

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 15 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение этой матрицы

$$\begin{bmatrix} 12-\lambda & -2 \\ -2 & 15-\lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad (10,36)$$

имеет корни 11 и 16.

Определим матрицу преобразования S. Из системы (10,29) при $\lambda = 11$ получаем

$$l_{11} - 2l_{21} = 0 \quad \text{и} \quad -4l_{12} - 2l_{22} = 0.$$

Отсюда из первого уравнения

$$\frac{l_{21}}{l_{11}} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} > 0,$$

а из второго

$$l_{22} = -2l_{12}.$$

Угол поворота координатных осей определится из равенства

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}.$$

Так как при $\lambda = 11$ оказалось, что $\operatorname{tg}\alpha > 0$, мы припишем λ первый номер. Итак,

$$\lambda_1 = 11; \quad \lambda_2 = 16.$$

Квадратичная форма $12x^2 - 4xy + 15y^2$, входящая в уравнение, приобретает после поворота осей вид

$$11x_1^2 + 16y_1^2. \tag{10,37}$$

Матрицу преобразования S, учитывая, что $l_{21} = \frac{1}{2} l_{11}$, а $l_{22} = -2l_{12}$, запишем так:

$$S = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ \frac{1}{2} l_{11} & -2l_{12} \end{bmatrix}. \tag{10,38}$$

Нормирующий множитель первого столбца

$$n_1 = \frac{1}{\pm\sqrt{l_{11}^2 + \left(\frac{1}{2} l_{11}\right)^2}} = \frac{2}{\pm\sqrt{5}\, l_{11}}.$$

Нормирующий множитель второго столбца

$$n_2 = \frac{1}{\pm\sqrt{l_{12}^2 + (-2l_{12})^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{5}\, l_{12}}.$$

На основании разъяснений относительно выбора знака у корня в выражении для n_1 и n_2 (стр. 248) выбираем у n_1 знак плюс, а у n_2 — минус

$$n_1 = \frac{2}{\sqrt{5}\, l_{11}}; \quad n_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}\, l_{12}}.$$

Внося эти множители в матрицу (10,38), получаем

$$S_{\text{норм}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Обратимся к преобразованию линейной части $-48x - 168y + 400$ заданного уравнения.

По формуле (10,19) выразим x и y через новые координаты x_1 и y_1:

$$X = SX^*;$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

(здесь x_1 заменен на x, а x_2 на y).

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{5}} y_1$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} y_1. \qquad (10{,}39)$$

С помощью этих формул линейная часть заданного уравнения

$$-48x - 168y + 400 = -\frac{264}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{288}{\sqrt{5}} y_1 + 400.$$

С учетом того, что квадратичная часть заданного уравнения на основании (10,37) преобразовалась в $11x_1^2 + 16y_1^2$, все заданное уравнение перепишется так:

$$11x_1^2 + 16y_1^2 - \frac{264}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{288}{\sqrt{5}} y_1 + 400 = 0.$$

Теперь нам осталось выделить полные квадраты

$$\left(11x_1^2 - \frac{264}{\sqrt{5}} x_1\right) + \left(16y_1^2 - \frac{288}{\sqrt{5}} y_1\right) + 400 = 0;$$

$$11\left(x_1^2 - \frac{24}{\sqrt{5}} x_1\right) + 16\left(y_1^2 - \frac{18}{\sqrt{5}} y_1\right) + 400 = 0;$$

$$11\left[\left(x_1 - \frac{12}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{144}{5}\right] + 16\left[\left(y_1 - \frac{9}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{81}{5}\right] + 400 = 0;$$

$$11\left(x_1 - \frac{12}{\sqrt{5}}\right)^2 + 16\left(y_1 - \frac{9}{\sqrt{5}}\right)^2 - 576 + 400 = 0;$$

$$11\left(x_1 - \frac{12}{\sqrt{5}}\right)^2 + 16\left(y_1 - \frac{9}{\sqrt{5}}\right)^2 = 176. \qquad (10{,}40)$$

Сделаем параллельный перенос координатной системы x_1Oy_1: введем замену

$$x_2 = x_1 - \frac{12}{\sqrt{5}}; \quad y_2 = y_1 - \frac{9}{\sqrt{5}}.$$

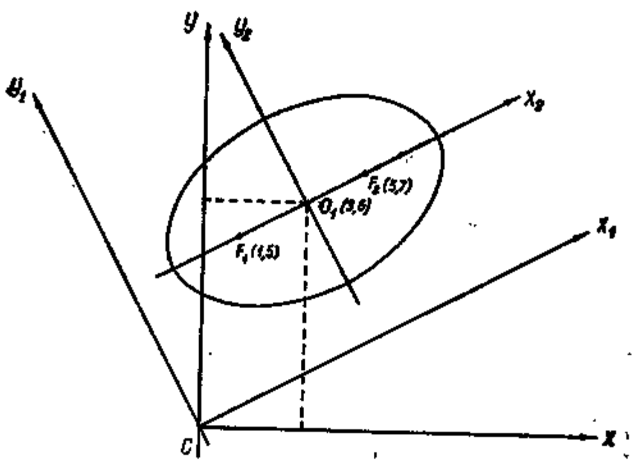
Этим преобразованием начало повернутой системы координат перенесено в точку $O_1\left(\frac{12}{\sqrt{5}}, \frac{9}{\sqrt{5}}\right)$ (учесть, что это координаты нового начала в системе координат x_1Oy_1).

В системе координат $x_2O_1y_2$ уравнение (10,40) запишется так:

$$11x_2^2 + 16y_2^2 = 176$$

или

$$\frac{x_2^2}{16} + \frac{y_2^2}{11} = 1.$$



К задаче 10,5

Кривая — эллипс. Его полуоси: $a = 4$; $b = \sqrt{11}$. Координаты нового начала O_1 в системе координат x_1Oy_1 равны $\frac{12}{\sqrt{5}}$ и $\frac{9}{\sqrt{5}}$; $O_1\left(\frac{12}{\sqrt{5}}; \frac{9}{\sqrt{5}}\right)$.

Докажите, что координаты нового начала O_1 в первоначальной системе координат равны (3; 6), а фокусы находятся в точках с координатами (1; 5); (5; 7).

Задача 10,6 (для самостоятельного решения). Упростить уравнение линии

$$3x^2 - 8xy + 3y^2 + 8x + 8y - 39 = 0$$

и определить координаты ее центра и фокусов в первоначальной системе координат.

Указания и промежуточные результаты

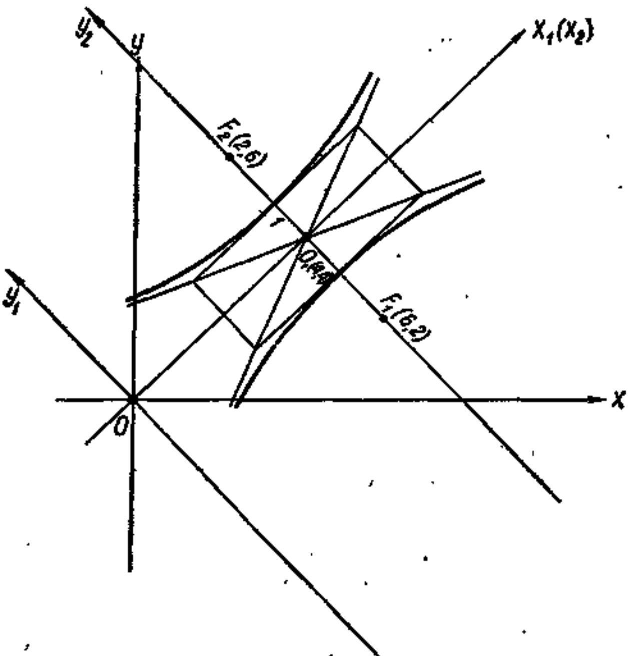
1. Матрица коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0.$$

3. За λ_1 принять $\lambda = -1$, а $\lambda_2 = 7$.



К задаче 10,6

4. Квадратичная форма уравнения $3x^2 - 8xy + 3y^2$ преобразуется к виду

$$-x_1^2 + 7y_1^2.$$

5. Угол поворота определится из условия $\operatorname{tg}\alpha = 1$

$$l_{21} = l_{11}; \; l_{22} = -l_{12}.$$

6. Нормирующие множители

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\, l_{11}}; \quad n_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}\, l_{12}}.$$

7. Нормированная матрица преобразования

$$S_{\text{норм}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Линейная часть заданного уравнения $8x+8y-39$ преобразуется к виду $\frac{16}{\sqrt{2}}x_1 - 39$.

Ответ. Кривая — гипербола. Ее каноническое уравнение

$$\frac{y_2^2}{1} - \frac{x_2^2}{7} = 1.$$

В первоначальной системе координат ее центр находится в точке (4; 4), а фокусы — в точке (2; 6) и (6; 2).

Задача 10,7 (для самостоятельного решения). Упростить уравнение линии

$$144x^2 - 120xy + 25y^2 - 1090x - 2616y + 24961 = 0.$$

Указания и промежуточные результаты

1. Матрица коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} 144 & -60 \\ -60 & 25 \end{bmatrix}.$$

2. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 169\lambda = 0.$$

Принять, что $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 169$. Квадратичная форма $144x^2 - 120xy + 25y^2$ преобразуется в $169y_1^2$.

3. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$; $l_{21} = \frac{12}{5}l_{11}$; $l_{22} = -\frac{5}{12}l_{12}$.

4. Нормированная матрица преобразования

$$S_{\text{норм}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}.$$

5. Линейная часть уравнения

$$-1090x + 2616y + 24961$$

преобразуется к виду $-2834x_1 + 24961$.

Ответ. Кривая — парабола, определяемая уравнением $13y_2^2 = 218x_2$. В системе координат x_1Oy_1, вершина параболы находится в точке $\left(\frac{229}{26}; 0\right)$.

Задача 10,8. Упростить уравнение линии

$$8x^2 + 4xy + 5y^2 + 48x - 24y + 108 = 0$$

и определить координаты ее фокусов в первоначальной системе координат.

Промежуточные результаты

1. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0.$$

2. Матрица преобразования

$$S_{\text{норм}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

4. В повернутой системе координат x_1Oy_1 заданное уравнение приобретет вид

$$9x_1^2 + 4y_1^2 + \frac{72}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{96}{\sqrt{5}}y_1 + 108 = 0.$$

5. После выделения полных квадратов это уравнение запишется так:

$$9\left(x_1 + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y_1 - \frac{12}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36.$$

Ответ.

$$\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{9} = 1.$$

Координаты фокусов в первоначальной системе координат:

$$(-5; 6); (-3, 2).$$

Содержание. Поверхности уровня, производная по направлению, градиент функции.

Это и шесть следующих практических занятий посвящаются векторному анализу.

Прежде чем решать задачи из этого практического занятия, рекомендуется повторить основы векторной алгебры, в особенности такие понятия, как скалярное и векторное произведения, векторно-скалярное произведение, двойное векторное произведение, а также основы теории проекций.

Ниже для справок помещены основные понятия и формулы векторной алгебры.

1. **Вектор и его координаты.** В прямоугольной системе координат каждому вектору $\bar{a}$ ставятся в соответствие три числа — его проекции a_x, a_y и a_z на координатные оси Ox, Oy, Oz. Эти числа называются координатами вектора, а вектор записывается в виде $\bar{a}\{a_x, a_y, a_z\}$. Если точка $A(x_1, y_1, z_1)$ — начало вектора, а точка $B(x_2, y_2, z_2)$ — его конец, то его проекции на оси прямоугольной системы координат равны разностям между одноимёнными координатами его конца и начала

$$a_x = x_2 - x_1; \quad a_y = y_2 - y_1; \quad a_z = z_2 - z_1.$$

Учитывая эти формулы, вектор $\bar{a}$ можно записать и в таком виде:

$$\bar{a}\{x_2 - x_1, \ y_2 - y_1, \ z_2 - z_1\}.$$

2. **Длина вектора.** Длина вектора $\bar{a}$, или (что то же) его модуль, обозначается одним из символов $|\bar{a}|$ или a и определяется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

3. **Равенство векторов.** Два вектора одинаковой длины, лежащие на параллельных прямых и одинаково направленные, называются равными.

4. **Произведение вектора на скаляр.** Произведением вектора $\bar{a}$ на скаляр m называется вектор, модуль которого равен ma — произведению числа m на модуль вектора $\bar{a}$. Этот новый вектор направлен так же, как и вектор $\bar{a}$, если $m > 0$, и противоположно

ему, если $m < 0$. Вектор $-\bar{a}$ называется противоположным вектору $\bar{a}$.

5. Единичный вектор. Орт. Вектор, по направлению совпадающий с данным вектором и по модулю (длине) равный единице, называется *единичным вектором* данного вектора, или *ортом*. Единичный вектор обозначается той же буквой, что и данный, но с ноликом в виде показателя степени. Таким образом, единичный вектор вектора $\bar{a}$ обозначается $\bar{a}^0$

$$\bar{a} = a\bar{a}^0.$$

6. Направляющие косинусы вектора. Косинусы углов, которые вектор составляет с положительными направлениями координатных осей, называются направляющими косинусами вектора. Углы, составляемые вектором с координатными осями Ox, Oy и Oz, обозначаются в дальнейшем соответственно через α, β и γ.

Между направляющими косинусами вектора существует соотношение

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

7. Проекция вектора на ось. Проекция вектора $\bar{a}$ на ось есть *скалярная величина*, равная произведению модуля вектора на косинус угла между направлением оси и направлением вектора:

$$a_l = \text{пр}_l\bar{a} = a\cos(\bar{l}, \bar{a}).$$

Проекции вектора $\bar{a}$ на оси Ox, Oy и Oz прямоугольной системы координат обозначаются соответственно через a_x, a_y и a_z и определяются по формулам

$$a_x = a\cos\alpha; \qquad \cos\alpha = \frac{a_x}{a};$$

$$a_y = a\cos\beta; \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{a};$$

$$a_z = a\cos\gamma; \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}$$

(обозначение углов вектора с координатными осями дано в предыдущем пункте). Если $\bar{a}^0$ — единичный вектор, то на основании этих формул (учитывая, что в этом случае его модуль равен 1) его проекции на оси Ox, Oy, Oz равны его направляющим косинусам

$$(\bar{a}^0)_x = \cos\alpha; \ (\bar{a}^0)_y = \cos\beta; \ (\bar{a}^0)_z = \cos\gamma.$$

8. Разложение вектора по трем координатным осям прямоугольной системы координат. Если a_x, a_y и a_z — проекции вектора $\bar{a}$ на оси Ox, Oy и Oz прямоугольной системы координат, а $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ — единичные векторы этих осей, то имеет место формула

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}.$$

9. Радиус-вектор точки. Радиусом-вектором точки $M(x, y, z)$ называется вектор, обозначаемый обыкновенно через $\bar{r}$, имеющий начало в начале координат, а конец — в этой точке. Проекции радиуса-вектора $\bar{r}$ на оси Ox, Oy, Oz равны соответственным координатам его конца

$$r_x = x;\ r_y = y;\ r_z = z,$$

поэтому

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

10. Скалярное произведение двух векторов. Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, которое обозначается символом $a \cdot \bar{b}$, называется произведение их модулей на косинус угла между ними. Если угол между векторами обозначить буквой φ, то согласно этому определению скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$ векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ находят по формуле

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = ab\cos\varphi.$$

Скалярное произведение двух векторов есть число. Так как

$$b\cos\varphi = \text{пр}_{\bar{a}}\bar{b},\ \text{а}\ a\cos\varphi = \text{пр}_{\bar{b}}\bar{a},$$

скалярное произведение

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a\,\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = b\,\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}.$$

СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

I. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны: $\bar{a} \perp \bar{b}$, то их скалярное произведение

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0.$$

II. Скалярное произведение двух равных векторов (иначе, скалярный квадрат) равно квадрату модуля

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = a^2.$$

III. Скалярное произведение векторов подчиняется законам, аналогичным законам произведения чисел:

а) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ переместительный (коммутативный) закон;

б) $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$ закон распределительности (дистрибутивности) по отношению к сложению;

в) $(n\bar{a}) \cdot \bar{b} = n(\bar{a} \cdot \bar{b})$ сочетательный (ассоциативный) закон по отношению к умножению на число.

IV. Выражение скалярного произведения $\bar{a} \cdot \bar{b}$ через проекции этих векторов на оси прямоугольной системы координат.

Если

$$\bar{a}\{a_x,\ a_y,\ a_z\},\ \text{а}\ \bar{b}\{b_x,\ b_y,\ b_z\},$$

то

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны, то

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

V. Косинус угла между двумя векторами.

Если φ — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}$$

или

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Если вектор $\bar{a}$ с координатными осями Ox, Oy и Oz составляет углы, соответственно равные α, β и γ, а вектор $\bar{b}$ с теми же осями составляет углы α_1, β_1 и γ_1, то косинус угла φ между этими векторами определяется по формуле

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1.$$

11. Векторное произведение двух векторов. Векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, которое обозначается символом $\bar{a} \times \bar{b}$ (читается «*a* крест *b*»), называется вектор, модуль которого равен произведению модулей перемножаемых векторов на синус угла между ними. Вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ направлен по перпендикуляру к плоскости, определяемой перемножаемыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в такую сторону, что наблюдателю, смотрящему с конца вектора $\bar{a} \times \bar{b}$ на перемножаемые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, кажется, что для совмещения первого множителя $\bar{a}$ со вторым множителем $\bar{b}$ по кратчайшему пути первый множитель нужно вращать против движения часовой стрелки.

Свойства векторного произведения двух векторов

I. По определению векторного произведения

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = ab\sin\alpha.$$

II.
$$\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a},$$

т. е. изменение порядка сомножителей в векторном произведении влечет за собой изменение его знака: векторное произведение не подчиняется переместительному закону.

III. Векторное произведение подчиняется распределительному закону по отношению к сложению

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}.$$

IV. Векторное произведение подчиняется сочетательному закону относительно умножения на число

$$(n\bar{a}) \times \bar{b} = n(\bar{a} \times \bar{b}).$$

V. Если известны проекции векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на оси прямоугольной системы координат

$$\bar{a}\{a_x, a_y, a_z\}; \quad \bar{b}\{b_x, b_y, b_z\},$$

то их векторное произведение определяется по формуле

$$\bar{a}\times\bar{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\bar{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\bar{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\bar{k},$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ — орты координатных осей.

Отсюда видно, что проекции векторного произведения на координатные оси равны

$$(\bar{a}\times\bar{b})_x = a_yb_z - a_zb_y; \quad (\bar{a}\times\bar{b})_y = a_zb_x - a_xb_z;$$
$$(\bar{a}\times\bar{b})_z = a_xb_y - a_yb_x.$$

Векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$ двух векторов $\bar{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ и $\bar{b}\{b_x, b_y, b_z\}$ может быть записано в виде определителя

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}.$$

VI. Условие параллельности двух векторов. Необходимым и достаточным условием параллельности двух векторов $\bar{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ и $\bar{b}\{b_x, b_y, b_z\}$ является равенство нулю их векторного произведения, т. е. необходимым и достаточным условием параллельности двух векторов является выполнение условия $\bar{a}\times\bar{b} = 0$, или, что равносильно, пропорциональности их одноименных проекций

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

12. Векторно-скалярное произведение трех векторов. Так называется произведение трех векторов типа $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$. Здесь сначала выполняется векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$, а затем оно скалярно умножается на вектор $\bar{c}$. Через проекции сомножителей на оси прямоугольной системы координат векторно-скалярное произведение

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Свойства векторно-скалярного произведения

I. Если в векторно-скалярном произведении два каких-либо множителя коллинеарны, то это произведение равно нулю.

II. В векторно-скалярном произведении допустима циклическая перестановка множителей.

13. Векторно-векторное произведение трех векторов. Так называется произведение трех векторов, имеющее вид

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}).$$

Иногда векторно-векторное произведение называется двойным векторным произведением.

Векторно-векторное произведение $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ трех векторов вычисляется по формуле

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}\,(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}\,(\bar{a} \cdot \bar{b}).$$

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Физическое поле. Физическим полем называется часть пространства или все пространство, в котором происходит физическое явление.

2. Скалярное поле. Физическое поле называется скалярным, если физическое явление, его образующее, характеризуется функцией $f = f(x, y, z)$, зависящей *только от координат* точек пространства, в котором это явление происходит. Скалярное поле полностью определено заданием одной функции $f(x, y, z)$ трех независимых переменных. Эта функция, независимо от ее физического смысла, называется потенциалом поля.

Если физическое явление образовало скалярное поле, то каждой точке $P(x_1, y_1, z_1)$ пространства, в котором происходит это явление, ставится в соответствие определенное число, характеризующее данное явление в рассматриваемой точке. Это число есть частное значение функции $f(x, y, z)$, вычисленное в точке P (примерами скалярного поля являются: поле электростатического потенциала, давление в атмосфере).

3. Поверхность уровня. Если однозначная функция соответствует скалярному полю, образованному физическим явлением, то поверхностью уровня (или эквипотенциальной поверхностью) этого поля называется поверхность, во всех точках которой функция $f(x, y, z)$ сохраняет одно и то же значение.

Поверхности уровня определяются уравнением

$$f(x, y, z) = C, \tag{11,1}$$

где C — постоянная величина.

Придавая постоянной C различные числовые значения, получим семейство поверхностей уровня. Через каждую точку пространства проходит одна поверхность уровня. Во всех точках поверхности уровня физическое явление протекает одинаково.

Уравнение поверхности уровня, проходящей через точку $P(x_1, y_1, z_1)$, имеет вид

$$f(x, y, z) = f(x_1, y_1, z_1). \tag{11,2}$$

4. Производная по направлению. Производная от функции $\varphi(x, y, z)$ по направлению $(\bar{l})$ характеризует скорость изменения функции $\varphi(x, y, z)$ по этому направлению, вычисленную в точке с координатами x, y, z. Эта производная вычисляется по формуле

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(\bar{l},\ x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(\bar{l},\ y) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(\bar{l},\ z). \qquad (11,3)$$

Величина производной по направлению зависит от выбора точки P, в которой она вычисляется, и от выбора направления, по которому она вычисляется. Направляющие косинусы направления $\bar{l}$ входят множителями в формулу (11,3), а координаты точки P являются аргументами частных производных, входящих в эту формулу.

5. Градиент функции. Градиентом скалярной функции $\varphi(x, y, z)$ называется вектор, проекции которого на координатные оси Ox, Oy и Oz соответственно равны $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, т. е.

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{k}. \qquad (11,4)$$

На основании этого определения проекции вектора $\operatorname{grad}\varphi$ на координатные оси запишутся так:

$$(\operatorname{grad}\varphi)_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x};\ (\operatorname{grad}\varphi)_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y};\ (\operatorname{grad}\varphi)_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad (11,5)$$

(предполагается при этом, что $\varphi(x, y, z)$ — однозначная непрерывная функция, имеющая непрерывные частные производные).

Модуль вектора $\operatorname{grad}\varphi$ вычисляется по формуле

$$|\operatorname{grad}\varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}. \qquad (11,6)$$

Если $\bar{l}^\circ$ — единичный вектор направления $\bar{l}$

$$\bar{l}^\circ = \cos(\bar{l},\ x)\,\bar{i} + \cos(\bar{l},\ y)\,\bar{j} + \cos(\bar{l},\ z)\,\bar{k},$$

то правая часть формулы (11,3) есть скалярное произведение вектора $\operatorname{grad}\varphi$ на этот единичный вектор $\bar{l}^\circ$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \operatorname{grad}\varphi\cdot\bar{l}^\circ, \qquad (11,7)$$

Так как $|\bar{l}^\circ| = 1$, то скалярное произведение

$$\operatorname{grad}\varphi\cdot\bar{l}^\circ = |\operatorname{grad}\varphi|\cdot 1\cdot\cos(\operatorname{grad}\varphi,\ \bar{l}^\circ) = |\operatorname{grad}\varphi|\cdot\cos(\operatorname{grad}\varphi, \bar{l}^\circ),$$

поэтому наибольшее значение скалярного произведения $\operatorname{grad}\varphi\cdot\bar{l}^\circ$ равно модулю $\operatorname{grad}\varphi$, т. е. $|\operatorname{grad}\varphi|$. Это будет иметь место тогда, когда направление $\bar{l}$ совпадет с направлением вектора $\operatorname{grad}\varphi$, так как в этом случае $\cos(\operatorname{grad}\varphi, \bar{l}^\circ) = 1$.

Поскольку производная функции φ по направлению характеризует скорость изменения функции φ по этому направлению, то можно сказать, что вектор $\operatorname{grad}\varphi$ есть вектор, в направлении которого скорость изменения функции φ является наибольшей и эта наибольшая скорость $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right)_{max}$ по модулю равна $|\operatorname{grad}\varphi|$, т. е.

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right)_{max} = |\operatorname{grad}\varphi| \qquad (11,7а)$$

или

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right)_{max} = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}. \qquad (11,7б)$$

Вектор** $\operatorname{grad}\varphi$ **в каждой точке направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через точку, в сторону возрастания функции. Модуль этого вектора равен скорости изменения функции $\varphi(x, y, z)$ по этому направлению нормали. Скорость изменения скалярной функции $\varphi(x, y, z)$ по некоторому направлению $(\bar{l})$ равна проекции вектора $\operatorname{grad}\varphi$ на это направление, т. е.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \text{пр}_{l}\,(\operatorname{grad}\varphi). \qquad (11,8)$$

В этом состоит основное свойство градиента функции: производная функции φ по направлению $\bar{l}$ равна проекции вектора градиента φ на направление $\bar{l}$.

Величина и направление градиента не зависят от выбора координатной системы.

Задача 11,1 (для самостоятельного решения). Найти поверхности уровня потенциала $\varphi = \frac{e}{r}$ электростатического поля точечного заряда, где r — расстояние точки M поля от точки, в которой находится электрический заряд.

Решение. Поместим начало координат в точку, в которой находится заряд. По формуле (11,1)

$$\varphi = \frac{e}{r} = C; \quad r = \frac{e}{C}.$$

Если координаты точки M есть x, y и z, то

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

а

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{e}{C}.$$

Уравнение $x^2+y^2+z^2=\frac{e^2}{C^2}$ определяет семейство концентрических сфер с центром в точке, в которой помещен заряд.

Задача 11,2. Найти градиент потенциала $\varphi=\frac{e}{r}$ электростатического поля, $|\operatorname{grad}\varphi|$ и его направляющие косинусы, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ — расстояние точки $A(x, y, z)$ поля от начала координат, в котором находится заряд e.

Решение. Чтобы воспользоваться формулой (11,4) для определения $\operatorname{grad}\varphi$, надо найти $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$. У нас $\varphi=\frac{e}{r}$, а потому проекция градиента этой функции на ось Ox

$$(\operatorname{grad}\varphi)_x=\left(\operatorname{grad}\frac{e}{r}\right)_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{e}{r}\right)}{\partial x}=-\frac{e}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}, \text{ но } r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}.$$

Значит,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-e\frac{x}{r^3};\quad (\operatorname{grad}\varphi)_x=-e\frac{x}{r^3}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-e\frac{y}{r^3};\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=-e\frac{z}{r^3}.$$

Подставив значения найденных частных производных $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ в формулу (11,4), получим

$$\operatorname{grad}\varphi=-e\frac{x}{r^3}\bar{i}-e\frac{y}{r^3}\bar{j}-e\frac{z}{r^3}\bar{k}$$

или

$$\operatorname{grad}\varphi=-\frac{e}{r^3}(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}).$$

Но вектор $x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ равен радиусу-вектору r точки $A(x, y, z)$ поля: $x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}=\bar{r}$, поэтому $\operatorname{grad}\varphi=-\frac{l}{r^3}\cdot r$. Учитывая, что $\frac{r}{r}=r^0$, получим окончательно

$$\operatorname{grad}\varphi=-\frac{e}{r^2}\bar{r}^0.$$

По закону Кулона напряженность $\bar{E}$ в точке электростатического поля точечного заряда определяется вектором $\frac{e}{r^2}\bar{r}^0$. Последнюю формулу поэтому можно переписать в виде

$$\operatorname{grad}\varphi = -\bar{E}$$

или

$$-\operatorname{grad}\frac{e}{r} = \bar{E}.$$

Из формулы (11,6)

$$|\operatorname{grad}\varphi| = e\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{r^6}} = e\sqrt{\frac{r^2}{r^6}} = \frac{e}{r^2};$$

$$|\operatorname{grad}\varphi| = \frac{e}{r^2}.$$

Направляющие косинусы вектора $\operatorname{grad}\frac{e}{r}$ найдем по формулам

$$\cos\left(\operatorname{grad}\frac{e}{r},\ x\right) = \frac{\left(\operatorname{grad}\frac{e}{r}\right)_x}{\left|\operatorname{grad}\frac{e}{r}\right|} = -\frac{e\frac{x}{r^3}}{\frac{e}{r^2}} = -\frac{x}{r};$$

$$\cos\left(\operatorname{grad}\frac{e}{r},\ y\right) = -\frac{y}{r};\quad \cos\left(\operatorname{grad}\frac{e}{r},\ z\right) = -\frac{z}{r}.$$

Задача 11,3. Найти градиент функции $\varphi(r)$, где r — расстояние точки $A(x,\ y,\ z)$ поля до начала координат $(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$.

Решение. Чтобы воспользоваться формулой (11,4), определим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial\varphi}{\partial z};\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2};$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

и аналогично $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$; $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$.

Получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \varphi'(r)\cdot\frac{x}{r};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = \varphi'(r)\cdot\frac{y}{r};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z} = \varphi'(r)\cdot\frac{z}{r}.$$

Отсюда следует

$$\operatorname{grad}\varphi(r) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{k} = \varphi'(r)\cdot\frac{x}{r}\bar{i} + \varphi'(r)\cdot\frac{y}{r}\bar{j} +$$

$$+\varphi'(r)\times\frac{z}{r}\bar{k} = \varphi'(r)\left[\frac{x}{r}\bar{i} + \frac{y}{r}\bar{j} + \frac{z}{r}\bar{k}\right] = \varphi'(r)\frac{x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}}{r} =$$

$$= \varphi'(r)\cdot\frac{\bar{r}}{r} = \varphi'(r)\cdot\bar{r}_0,$$

так как $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = \bar{r}$, а $\bar{r}^{\circ}$ — орт вектора $\bar{r} \cdot \left(\bar{r}^{\circ} = \frac{\bar{r}}{r}\right)$.
Итак,

$$\operatorname{grad} \varphi(r) = \varphi'(r) \cdot \bar{r}^{0}. \tag{11,9}$$

Рассмотрим важные частные случаи:
1) $\varphi(r) = r$; $\varphi'(r) = 1$;
Тогда

$$\operatorname{grad} r = \bar{r}^{0} = \frac{\bar{r}}{r}; \tag{11,10}$$

$$2)\ \varphi(r) = \frac{1}{r};\quad \varphi'(r) = -\frac{1}{r^2};$$

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\bar{r}}{r}.$$

Окончательно

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\bar{r}}{r^3}. \tag{11,11}$$

Если C — постоянная величина, то

$$\operatorname{grad} \frac{C}{r} = -\frac{C}{r^3} \cdot \bar{r}. \tag{11,12}$$

Укажем на одно из применений только что полученного результата.

По закону Ньютона материальная точка O массы m притягивает материальную точку $A(x, y, z)$ массы 1 с силой $\bar{F}$, модуль которой $F = k\frac{m}{r^2}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а k — постоянная притяжения.

Эта сила направлена от A к O.

Поместим в точку O начало координат. Обозначим через $\bar{r}$ радиус-вектор $\overline{OA}$ точки A, а соответствующий ему единичный вектор — через $\bar{r}^{0}\left(\bar{r}^{0} = \frac{\bar{r}}{r}\right)$.

Тогда $-\bar{r}^{0}$ будет единичным вектором для вектора $\overline{AO}$, противоположного вектору $\bar{r} = \overline{OA}$. Сила $\bar{F}$ будет равна ее численной величине F, умноженной на $-\bar{r}^{\circ}$, и

$$\bar{F} = k\frac{m}{r^2} \cdot (-\bar{r}^{0})$$

$$\bar{F} = -k\frac{m}{r^2} \cdot \frac{\bar{r}}{r},$$

т. е.

$$\bar{F} = -k\frac{m}{r^3} \cdot \bar{r}.$$

На основании формул (11,11) и (11,12)

$$\bar{F} = \operatorname{grad} \frac{km}{r}.$$

Легко проверить, что проекции силы притяжения F_x, F_y и F_z являются частными производными функции $V = \frac{km}{r}$ соответственно по координатам x, y и z. Действительно, из $\bar{F} = -k\frac{m}{r^3} \cdot \bar{r}$ следует, что

$$\bar{F} = -k\frac{m}{r^3}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}),$$

а

$$F_x = -\frac{km}{r^3}x; \quad F_y = -\frac{km}{r^3}y; \quad F_z = -\frac{km}{r}z.$$

Если же взять частные производные от функции $V = \frac{km}{r^2}$, учитывая, что $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, получим

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{km}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{km}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{km}{r^3}x$$

и аналогично

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{km}{r^3}y; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{km}{r^3}z,$$

т. е. проекции силы притяжения равны

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial V}{\partial z}. \qquad (11,13)$$

Таким образом, сила притяжения $\bar{F} = -\frac{km}{r^3} \cdot \bar{r}$, о которой шла речь, является градиентом функции $V = \frac{km}{r}$, т. е.

$$\bar{F} = \operatorname{grad} \frac{km}{r},$$

а ее проекции на оси прямоугольной системы координат равны частным производным от функции $V = \frac{km}{r}$, которая называется потенциалом силы притяжения (это свойство потенциала силы притяжения было замечено Лагранжем). Поэтому для определения силы притяжения между двумя точками надо только найти ее потенциал, отыскать его частные производные по координатам x, y и z, которые равны проекциям силы притяжения, а ее модуль найдется по формуле

$$F = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}. \qquad (11,14)$$

Если на точку A действует не только точка O, но и неподвижные точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с массами, соответственно равными $m_1, m_2, \ldots, m_n$, то потенциал точки A

$$V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \cdots + \frac{m_n}{r_n}\,*$$

или

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i},$$

где r_i есть расстояние AA_i, причем предполагается что $r_i \neq 0$. Если масса непрерывно заполняет дугу кривой, поверхность или тело, то потенциал этой массы относительно точки A вычисляется по следующим формулам:

для случая кривой

$$V = \int\limits_{l} \frac{dm}{r}; \tag{11,15}$$

для случая поверхности

$$V = \iint\limits_{(s)} \frac{dm}{r}; \tag{11,16}$$

для тела

$$V = \iiint\limits_{(V)} \frac{dm}{r}. \tag{11,17}$$

В этих формулах dm — элемент массы.

Если точка A находится вне притягивающих масс, то все входящие в эти формулы интегралы собственные.

В случае, когда точка A находится внутри притягивающей массы, r становится равным нулю, подынтегральные функции неограниченно возрастают, а интегралы делаются несобственными. Однако эти интегралы существуют и проекции силы и в данном случае определяют также по формулам (11,13). Доказательство этого положения можно найти, например, в учебнике Г. М. Фихтенгольца «Курс дифференциального и интегрального исчисления», т. III, § 638.

Задача 11,4. Вычислить потенциал однородного призматического стержня длиной $2l$ относительно материальной точки M с массой, равной 1, лежащей на продолжении его оси. При этом учесть, что поперечное сечение s стержня настолько мало, что стержень можно рассматривать как отрезок прямой линии (см. чертеж).

---

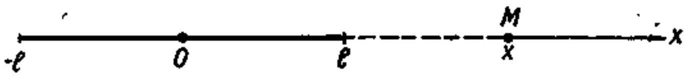
* В этой и следующих формулах принято, что постоянная притяжения $k = 1$. Это означает, что за единицу силы притяжения принята сила, с которой притягиваются друг к другу две материальные точки с массами, равными 1, находящиеся одна от другой на расстоянии, равном единице.

Решение. Поместим начало координат в середину стержня. Расстояние точки M от начала координат обозначим через x. При решении задачи будем считать стержень отрезком прямой, поэтому воспользуемся формулой (11,15). Если бы в условии задачи не было этой оговорки, интегрирование следовало бы производить по объему стержня при помощи формулы (11,17).

Входящий в числитель подынтегрального выражения (11,15) элемент массы мы найдем как произведение объема элемента стержня на его плотность

$$dm = \gamma s\, dr,$$

где γ — постоянная плотность стержня (постоянная потому, что стержень однороден), dr — элемент длины стержня.



К задаче 11,4

В формуле (11,15) r — расстояние точки M до любой точки N стержня, причем это расстояние на стержне при условии, что $x > l$, изменяется от $x - l$ до $x + l$. По формуле (11,15) находим

$$V = \int\limits_{x-l}^{x+l} \frac{\gamma s\, dr}{r} = \gamma s \ln r \Big|_{x-l}^{x+l} = \gamma s \ln \frac{x+l}{x-l}.$$

Если бы точка P находилась на продолжении оси стержня слева от него ($x < -l$), то пределы интегрирования были бы $x + l$ и $x - l$. В этом случае

$$V = \gamma s \ln \frac{x-l}{x+l}.$$

Итак, относительно точки M потенциал стержня

$$V = \gamma s \ln \frac{x+l}{x-l}, \text{ если } x > l$$

или

$$V = \gamma s \ln \frac{x-l}{x+l}, \text{ если } x < -l.$$

Зная потенциал V, вычислим величину силы, с которой стержень притягивает точку M (формула (11,14). Если $x > l$, то

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \gamma s \left(\frac{1}{x+l} - \frac{1}{x-l} \right) = -\gamma s \frac{2l}{x^2 - l^2}.$$

Если же $x < -l$, то

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \gamma s \frac{2l}{x^2 - l^2}.$$

Учитывая, что масса m стержня равна его объему, умноженному на плотность (стержень однороден), имеем

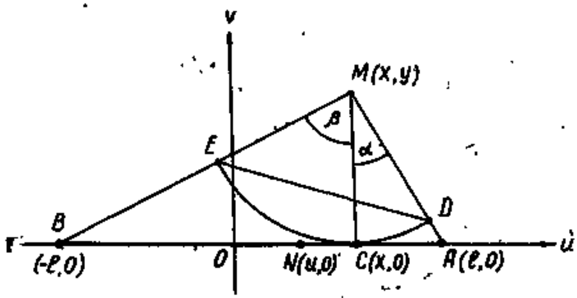
$$m = 2ls\gamma$$

и тогда

$$F_x = \pm \frac{m}{x^2 - l^2},$$

где верхний знак соответствует случаю $x < -l$, а нижний — случаю $x > l$. Если бы в точке M была помещена не единица массы, а масса m_1, то сила притяжения была бы равна

$$F = \pm \frac{mm_1}{x^2 - l^2}.$$



К задаче 11,5

Задача 11,5. Вычислить потенциал однородного стержня длиной $2l$ относительно точки M массы $m = 1$, если точка находится в любом месте плоскости (но только не внутри стержня и не на его поверхности). Стержень рассматривать как отрезок прямой.

Решение. Обозначим координаты точки M через x и y. Ее расстояние до переменной точки $N(u, O)$ стержня вычисляется по формуле.

$$r = \sqrt{(u - x)^2 + y^2}.$$

Если поперечное сечение стержня равно s, а его плотность γ, то элемент стержня длиной du имеет массу

$$dm = \gamma s \, du.$$

По формуле (11,15) потенциал стержня

$$V = \int_{-l}^{l} \frac{\gamma s \, du}{\sqrt{(u - x)^2 + y^2}},$$

где x и y следует рассматривать как величины постоянные, а переменной интегрирования является u. Выполняя интегрирование, получим

$$V=\gamma s\ln\left[u-x+\sqrt{(u-x)^2+y^2}\right]\Big|_{-l}^{+l}=$$
$$=\gamma s\left[\ln\left(l-x+\sqrt{(l-x)^2+y^2}\right)-\ln\left(-l-x+\sqrt{(l+x)^2+y^2}\right)\right].$$

Окончательно

$$V=\gamma s\ln\frac{\sqrt{(l-x)^2+y^2}+l-x}{\sqrt{(l+x)^2+y^2}-l-x}.$$

Таким образом, потенциал V является функцией x и y.

Теперь, зная потенциал, определим силу, с которой стержень притягивает точку M. Выполним дифференцирование функции V по x и y:

$$F_x=\frac{\partial V}{\partial x}=\gamma s\left[\frac{1}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}+l-x}\cdot\left(\frac{-(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}}-1\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{(l+x)^2+y^2}-l-x}\cdot\left(\frac{l+x}{\sqrt{(l+x)^2+y^2}}-1\right)\right]$$

или

$$F_x=\gamma s\left[\frac{x-l-\sqrt{(l-x)^2+y^2}}{\left(\sqrt{(l-x)^2+y^2}+l-x\right)\cdot\sqrt{(l-x)^2+y^2}}-\right.$$
$$\left.-\frac{l+x-\sqrt{(l+x)^2+y^2}}{\left(\sqrt{(l+x)^2+y^2}-l-x\right)\sqrt{(l+x)^2+y^2}}\right].$$

Отсюда

$$F_x=\gamma s\left[\frac{1}{\sqrt{(l+x)^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}}\right].$$

Замечая, что знаменатель первой дроби есть расстояние точки M до левого конца стержня $B(-l,\ O)$, т. е. BM, а знаменатель второй дроби есть расстояние точки M до правого конца стержня $A(l,\ O)$, т. е. AM, получаем

$$F_x=\gamma s\left(\frac{1}{BM}-\frac{1}{AM}\right);$$

$$F_y=\frac{\partial V}{\partial y}=\gamma s\left[\frac{1}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}+l-x}\cdot\frac{y}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{(l+x)^2+y^2}-l-x}\cdot\frac{y}{\sqrt{(l+x)^2+y^2}}\right].$$

В первых дробях каждого из произведений в квадратной скобке последнего выражения уничтожим иррациональность в знаменателе:

$$F_y=\frac{\gamma s}{y}\left(\frac{\sqrt{(l-x)^2+y^2}-l+x}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}}-\frac{\sqrt{(l+x^2)+y^2}+l+x}{\sqrt{(l+x)^2+y^2}}\right)$$

или

$$F_y = \frac{\gamma s}{y}\left(1 - \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}} - 1 - \frac{l+x}{\sqrt{(l+x)^2+y^2}}\right)$$

и окончательно

$$F_y = -\frac{\gamma s}{y}\left(\frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}} + \frac{l+x}{\sqrt{(l+x)^2+y^2}}\right).$$

Учитывая, что $l-x = AC$; $l+x = BC$

$$\sqrt{(l-x)^2+y^2} = AM, \text{ а } \sqrt{(l+x)^2+y^2} = BM,$$

получим

$$F_y = -\frac{\gamma s}{y}\left[\frac{AC}{AM} + \frac{BC}{BM}\right].$$

Преобразуем теперь выражения, найденные для F_x и F_y. Из чертежа видно, что

$$BM = \frac{y}{\cos\beta}; \quad AM = \frac{y}{\cos\alpha}; \quad \frac{AC}{AM} = \sin\alpha; \quad \frac{BC}{BM} = \sin\beta,$$

поэтому F_x и F_y могут быть записаны в виде

$$F_x = \gamma s\left(\frac{\cos\beta}{y} - \frac{\cos\alpha}{y}\right) = \frac{\gamma s}{y}(\cos\beta - \cos\alpha);$$

$$F_y = \frac{\gamma s}{y}(\sin\alpha + \sin\beta)$$

Модуль силы притяжения

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

и тогда

$$F = \sqrt{\frac{\gamma^2 s^2}{y^2}(\cos\beta - \cos\alpha)^2 + \frac{\gamma^2 s^2}{y^2}(\sin\alpha + \sin\beta)^2} =$$

$$= \frac{\gamma s}{y}\sqrt{\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta} =$$

$$= \frac{\gamma s}{y}\sqrt{2 - 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)} =$$

$$= \frac{\gamma s}{y}\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\alpha+\beta)} = \frac{\gamma s}{y}\sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$F = \frac{2\gamma s}{y}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}. \qquad \text{(A)}$$

Из чертежа видно, что, если провести дугу окружности с центром в точке M радиусом равным ординате точке M, то длина хорды ED, которая стягивает дугу этой окружности, заключенную между отрезками, соединяющими точку M с концами стержня, будет равна

$$ED = 2y\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

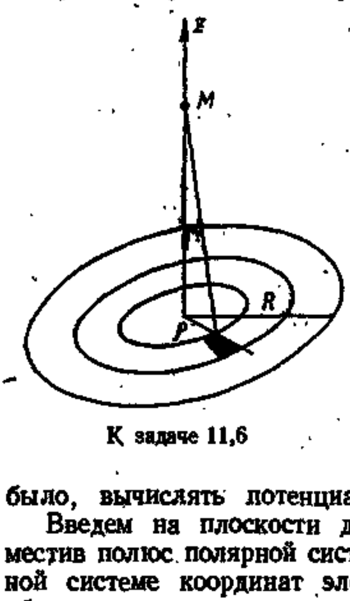
Умножая в (A) числитель и знаменатель дроби на y и замечая, что масса m хорды ED (если считать ее плотность и поперечное сечение такими же, как и у стержня AB) будет равна

$$m = \underbrace{2y \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}_{\text{длина хорды}} \cdot s \cdot \gamma,$$

получим

$$F = \frac{m}{y^2},$$

т. е. величина силы притяжения стержнем точки M равна силе, с которой эту точку притягивала бы масса m, сосредоточенная в середине дуги ED, построенной, как указано выше.



К задаче 11,6

Задача 11,6. Определить потенциал круглого однородного диска относительно точки M единичной массы, находящейся на перпендикуляре к диску, восстановленном из его центра. Расстояние точки M от диска равно z, плотность диска γ, его радиус R, толщину диска h во внимание не принимать. Определить также силу притяжения диском указанной точки.

Решение. Поскольку, как указано в условии задачи, толщину диска не следует принимать во внимание, диск можно рассматривать как круг, а поэтому при вычислении потенциала будем пользоваться формулой (11,16). Если бы этого указания не было, вычислять потенциал следовало бы по формуле (11,17).

Введем на плоскости диска полярные координаты ρ и φ, поместив полюс полярной системы координат в центр диска. В полярной системе координат элемент площади равен $\rho\, d\rho\, d\varphi$. Элемент объема диска

$$h\rho\, d\rho\, d\varphi,$$

а масса этого элемента

$$dm = \gamma h\, \rho d\, \rho d\varphi.$$

В формуле (11,16) расстояние r точки M до элемента диска равно

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

и тогда потенциал

$$V = \iint\limits_{(s)} \frac{\gamma h\, \rho d\rho\, d\varphi}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \gamma h \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = 2\pi\gamma h \sqrt{\rho^2 + z^2}\Big|_0^R.$$

$$V = 2\pi\gamma h\left(\sqrt{R^2 + z^2} - z\right).$$

Модуль силы притяжения найдем по формуле (11,14). Так как точка M симметрична по отношению к диску, то проекции F_x и F_y силы притяжения на оси Ox и Oy равны нулю: $F_x = F_y = 0$. Остается найти $F_z = \frac{dV}{dz}$

$$F_z = \frac{dV}{dz} = 2\pi\gamma h\left(\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - 1\right);$$

$$F_z = 2\pi\gamma h \cdot \frac{z - \sqrt{R^2+z^2}}{\sqrt{R^2+z^2}}.$$

Если учесть, что масса диска $m = \pi R^2\gamma h$, то $\gamma h = \frac{m}{\pi R^2}$ и поэтому

$$F_z = \frac{2m}{R^2} \cdot \frac{z - \sqrt{R^2+z^2}}{\sqrt{R^2+z^2}}.$$

Задача 11,7. Определить потенциал и силу притяжения полого шара (шарового слоя) относительно точки M единичной массы, лежащей: 1) вне шара; 2) внутри полого пространства 3) внутри массы слоя.

Радиусы шаровых поверхностей, ограничивающих слой для внутренней и внешней поверхности, равны соответственно a и R $(a < R)$, плотность γ является известной функцией ρ — расстояния точки слоя от центра шара: $\gamma = \psi(\rho)$.

Решение. Обозначим расстояние точки M от центра шара через z и расположим координатные оси так, чтобы положительное направление оси Oz проходило через точку M. На чертеже $OC = a$; $OD = R$; $OM = z$; $ON = \rho$. Применим сферические координаты. Известно, что в сферической системе координат элемент объема

$$dV = \rho^2 \sin\theta d\rho\, d\varphi\, d\theta.$$

Поскольку плотность $\gamma = \psi(\rho)$, находим, что масса элемента слоя

$$dm = \psi(\rho)\, \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi d\theta.$$

Так как мы имеем дело с телом, то для решения задачи надо воспользоваться формулой (11,17). Входящая в нее величина

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2 - 2\rho z\cos\theta}$$

равна расстоянию MN точки M до элемента объема и тогда потенциал

$$V = \iiint\limits_{(v)} \frac{\psi(\rho)\, \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta}{\sqrt{z^2+\rho^2-2\rho z\cos\theta}};$$

$$V = \int\limits_a^R \psi(\rho)\, \rho^2\, d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{z^2+\rho^2-2\rho z\cos\theta}}.$$

Начнем с вычисления внутреннего интеграла

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{z^2+\rho^2-2\rho z\cos\theta}} = \frac{1}{\rho z}\sqrt{z^2+\rho^2-2\rho z\cos\theta}\,\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\rho z}\left(\sqrt{z^2+\rho^2+2\rho z} - \sqrt{z^2+\rho^2-2\rho z}\right).$$

При вычислении интеграла была использована формула $\int \frac{u'}{\sqrt{u}}\,dx = 2\sqrt{u} + c$. Производная подкоренного выражения по переменной θ равна $2\rho z\sin\theta$. Следует учесть, что

$$\sqrt{z^2+\rho^2-2\rho z} = \sqrt{(z-\rho)^2} =$$

$= \left.\begin{matrix} z-\rho, \\ \rho - z, \end{matrix}\right\}$ если $z > \rho$ (т. е. если точка M лежит вне шарового слоя) если $z < \rho$ (т. е. если точка M лежит внутри полого пространства).

Случай 1 (фиг. 11,1). Когда точка M лежит вне шарового слоя, то $z > \rho$, $\sqrt{(z-\rho)^2} = z-\rho$, а

$$I = \frac{1}{\rho z}\Big[(z+\rho)-(z-\rho)\Big] = \frac{1}{\rho z}(z+\rho-z+\rho) = \frac{2}{z}.$$

Тогда, учитывая, что $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$, получаем

$$V = \frac{2}{z}\cdot 2\pi \int_a^R \psi(\rho)\,\rho^2\,d\rho = \frac{4\pi}{z}\int_a^R \varphi(\rho)\,\rho^2\,d\rho,$$

или иначе

$$V = \frac{1}{z}\int_a^R 4\pi\psi(\rho)\,\rho^2\,d\rho. \tag{11,18}$$

Выражение $4\pi\rho^2\,d\rho$ есть объем бесконечно тонкого шарового слоя, а так как $\psi(\rho)$ — плотность, то $4\pi\psi(\rho)\,\rho^2\,d\rho$ есть масса бесконечно тонкого шарового слоя, поэтому $\int_a^R 4\pi\psi(\rho)\,\rho^2\,d\rho$ равен всей массе m рассматриваемого шарового слоя.

Окончательно относительно внешней точки потенциал шарового слоя

$$V = \frac{m}{z}. \tag{11,19}$$

Случай 2. Если точка M лежит внутри полого пространства шара, то $z < \rho$, $\sqrt{(z-\rho)^2} = \rho - z$, а интеграл

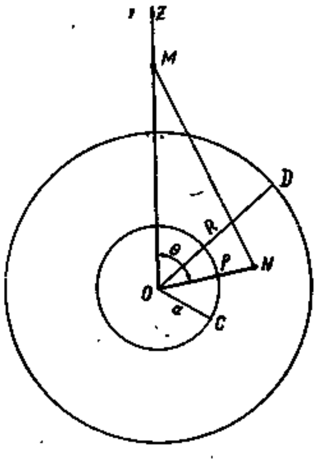
$$I = \frac{1}{\rho z}\left[(\rho+z)-(\rho-z)\right] = \frac{1}{\rho z}(\rho+z-\rho+z) = \frac{2}{\rho}$$

и тогда относительно точки, лежащей внутри полого пространства, с учетом того, что $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$,

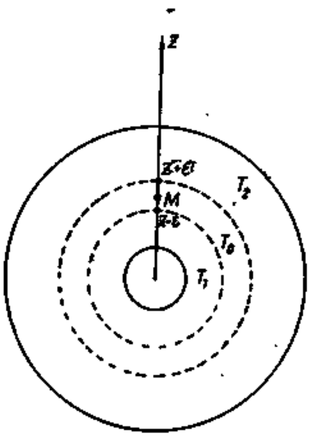
$$V = 4\pi \int\limits_a^R \psi(\rho)\, \rho d\rho. \tag{11,20}$$

Из этой формулы следует, что внутри полого пространства потенциал шарового слоя не зависит от z, т. е. он одинаков во всех точках.

Нам осталось рассмотреть случай, когда точка M лежит внутри шарового слоя.



Фиг. 11,1



Фиг. 11,2

Случай 3 (фиг. 11,2). Проведем две концентрических шаровых поверхности: одну — радиусом $z - \varepsilon$, другую — радиусом $z + \varepsilon$. Эти две поверхности разделят шаровой слой на три части: T_1, T_0 и T_2. Точка M лежит в слое T_0. По отношению к слою T_1 она является внешней. Поэтому потенциал этого слоя, который мы обозначим через V_1, следует вычислять по формуле (11,18), а интеграл, входящий в эту формулу, надо вычислять в пределах от a до $z - \varepsilon$, после чего вычислить предел полученного выражения при $\varepsilon \to 0$. Таким образом,

$$V_1 = \frac{4\pi}{z} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{z-\varepsilon} \psi(\rho)\, \rho^2\, d\rho.$$

По отношению же к слою T_2 точку M нужно рассматривать как лежащую внутри полого пространства. Поэтому потенциал этого слоя, который мы обозначим через V_2, следует вычислять по формуле (11,20), интеграл в ней взят в пределах от $z+\varepsilon$ до R, а в полученном выражении перейти к пределу, устремляя ε к нулю. Таким образом,

$$V_2 = 4\pi \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{z+\varepsilon}^{R} \psi(\rho)\,\rho\,d\rho.$$

Потенциал V всего шарового слоя рассмотрим как сумму потенциалов слоев T_1 и T_2.

$$V = V_1 + V_2,$$

т. е.

$$V = \frac{4\pi}{z} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a}^{z-\varepsilon} \psi(\rho)\,\rho^2\,d\rho + 4\pi \lim \int\limits_{z+\varepsilon}^{R} \psi(\rho)\,\rho\,d\rho. \quad (11,21)$$

Если плотность $\psi(\rho)$ слоя есть величина постоянная, равная γ,

$$\psi(\rho) = \text{const} = \gamma,$$

то

$$V = \frac{4\pi}{z} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a}^{z-\varepsilon} \gamma\rho^2\,d\rho + 4\pi \lim \int\limits_{z+\varepsilon}^{R} \gamma\rho\,d\rho = \frac{4\pi\gamma}{z} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\rho^3}{3}\Big|_{a}^{z-\varepsilon} +$$

$$+ 4\pi\gamma \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\rho^2}{2}\Big|_{z+\varepsilon}^{R} = \frac{4\pi\gamma}{3z} \lim_{\varepsilon\to 0} [(z-\varepsilon)^3 - a^3] + 2\pi\gamma \lim_{\varepsilon\to 0} [R^2 - (z+\varepsilon)^2].$$

Вычисляя входящие в эту формулу пределы, можно сделать вывод, что если шаровой слой однороден, то его потенциал на внутреннюю точку

$$V = \frac{4\pi\gamma}{3z}(z^3 - a^3) + 2\pi\gamma(R^2 - z^2). \quad (11,22)$$

При $a = 0$ в шаре не будет полого пространства (полный шар) и тогда при постоянной плотности γ относительно внешней точки потенциал шара на основании (11,19)

$$V = \frac{M}{z},$$

где M — масса шара.

В случае же, если точка находится внутри полного шара, $a = 0$ из (11,22) потенциал

$$V = \frac{4}{3}\pi\gamma z^2 + 2\pi\gamma R^2 - 2\pi\gamma z^2,$$

или

$$V = 2\pi\gamma R^2 - \frac{2}{3}\pi\gamma z^2. \quad (11,23)$$

Если точка лежит на поверхности шара, то $z = R$ и из (11,23) следует, что потенциал однородного шара относительно точки, лежащей на его поверхности,

$$V = 2\pi\gamma R^2 - \frac{2}{3}\pi\gamma R^2$$

или

$$V = \frac{4}{3}\pi\gamma R^2.$$

Теперь перейдем к вычислению силы, с которой точка притягивается шаровым слоем.

Случай 1 (точка лежит вне шарового слоя). Потенциал V вычисляется по формуле (11,19). Проекция F_z силы притяжения на ось Oz

$$F_z = \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{m}{z^2}. \tag{11,24}$$

Очевидно, что проекции F_x и F_y силы притяжения на оси Ox и Oy ввиду симметрии точки M относительно шара равны нулю:

$$F_x = F_y = 0.$$

На основании (11,24) мы заключаем, что шаровой слой притягивает точку, находящуюся вне его, с такой же силой, как если бы вся его масса шара была сосредоточена в его центре.

Случай 2 (точка лежит внутри полого пространства шара). Потенциал подсчитывается по формуле (11,20), от z он не зависит. Поэтому проекция силы притяжения на ось Oz

$$F_z = \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Случай 3 (точка находится внутри однородного шарового слоя). На основании формулы (11,22)

$$F_z = \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{4\pi\gamma}{3z^2}(z^3 - a^3) + \frac{4\pi\gamma}{3z}\cdot 3z^2 - 4\pi\gamma z;$$

$$F_z = -\frac{4\pi\gamma}{3}\cdot\frac{z^3 - a^3}{z^2}. \tag{11,25}$$

Но масса слоя T_1, которую мы обозначим через m_1, равна $\frac{4}{3}\pi\gamma(z^3 - a^3)$, поэтому

$$F_z = -\frac{m_1}{z^2}. \tag{11,26}$$

Таким образом, получается, что сила притяжения шаровым слоем точки, находящейся внутри его, такая же, как если бы вся масса этого шарового слоя находилась в его центре. Можно показать, что это заключение остается верным и для неоднородного шарового слоя.

Укажем, что формулы (11,24) и (11,26) верны и тогда, когда вместо шарового слоя берется полный шар. Тогда в этих формулах m — масса полного шара, а m_1 масса шара радиуса $z\,(z < R)$.

Из формулы (11,23) заключаем, что притяжение полным шаром постоянной плотности внутренней точки

$$F_z = \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{4}{3}\pi\gamma z,$$

т. е. притяжение пропорционально расстоянию точки от центра шара.

Замечание. Если в точке M помещена не единичная масса, а масса m_0, то при вычислении потенциала и притяжения в соответствующих формулах этой задачи правые части следует умножить на m_0.

Задача 11,8. Дано скалярное поле $\varphi = \frac{x^2y^3}{z^2}$. В каком направлении функция φ будет возрастать быстрее всего, если исходить из точки A (1, 2, —1)?

Решение. Известно, что направление, в котором функция растет с наибольшей скоростью, указывается градиентом этой функции. Поэтому прежде всего найдем градиент заданной функции в произвольной точке. У нас

$$\varphi = \frac{x^2y^3}{z^2}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{2xy^3}{z^2}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{3x^2y^2}{z^2}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{2x^2y^3}{z^3}.$$

Подставляя значения этих производных в формулу (11,4), определяющую градиент функции, получаем

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{2xy^3}{z^2}\bar{i} + \frac{3x^2y^2}{z^2}\bar{j} - \frac{2x^2y^3}{z^3}\bar{k}.$$

Теперь найдем $\operatorname{grad}\varphi$ в точке A (1, 2, —1), заменив в этой формуле x, y и z их значениями в точке A:

$$x = 1; \quad y = 2; \quad z = -1.$$

Вектор $(\operatorname{grad}\varphi)_A = 16\bar{i} + 12\bar{j} + 16\bar{k}$ и указывает направление, в котором заданная функция растет скорее всего, если исходить из точки A.

Задача 11,9 (для самостоятельного решения). Докажите, что функция $V = \frac{km}{r}\left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Указание. Используйте найденные в задаче 11,4 значения $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$.

Задача 11,10. Доказать, что:

$$1)\ \operatorname{grad}(\varphi+\psi)=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{grad}\psi; \qquad (11,27)$$

$$2)\ \operatorname{grad}(\varphi\cdot\psi)=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi; \qquad (11,28)$$

$$3)\ \operatorname{grad}F(\varphi)=F'(\varphi)\operatorname{grad}\varphi, \qquad (11,29)$$

где $\varphi=\varphi(x,\ y,\ z)$; $\psi=\psi(x,\ y,\ z)$.

Решение. 1. Формула (11,27) следует прямо из формулы (11,4). Действительно,

$$\operatorname{grad}(\varphi+\psi)=\frac{\partial}{\partial x}(\varphi+\psi)\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}(\varphi+\psi)\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}(\varphi+\psi)\bar{k},$$

поэтому

$$\operatorname{grad}(\varphi+\psi)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\bar{k}=$$

$$=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{k}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\bar{k}\right)=$$

$$=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{grad}\psi$$

и формула (11,27) доказана. Несмотря на свою простоту она очень важна, так как с ее помощью решается вопрос о построении суммы векторных полей.

Частный случай. Если $\psi=C$, то, поскольку в этом случае частные производные

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial z}=0,$$

имеем

$$\operatorname{grad}(\varphi+C)=\operatorname{grad}\varphi.$$

2. Докажем теперь формулу (11,28)

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi)=\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi)\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}(\varphi\psi)\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}(\varphi\psi)\bar{k}.$$

Легко получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\psi+\frac{\partial\psi}{\partial x}\varphi;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\varphi\psi)=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\psi+\frac{\partial\psi}{\partial y}\varphi;$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\varphi\psi)=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\psi+\frac{\partial\psi}{\partial z}\varphi.$$

Умножая обе части каждого из этих равенств соответственно на $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ и почленно складывая, имеем

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi)=\psi\operatorname{grad}\varphi+\varphi\operatorname{grad}\psi.$$

Частные случаи: а) если $\varphi = \psi$, то

$$\operatorname{grad} \varphi^2 = 2\varphi \operatorname{grad} \varphi;$$

б) если $\psi = C$, то

$$\operatorname{grad} C\varphi = C \operatorname{grad} \varphi.$$

3. Формулу (11,29) докажите самостоятельно.

Задача 11,11. Доказать, что, если $\bar{r}$ — радиус-вектор точки $A(x, y, z)$, а $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — функция трех независимых переменных, то

$$d\varphi = \overline{dr} \cdot \operatorname{grad} \varphi$$

($\overline{dr} \cdot \operatorname{grad} \varphi$ — скалярное произведение векторов $\overline{dr}$ и $\operatorname{grad} \varphi$).

Решение. Если функция $\varphi = \varphi(x, y, z)$, то ее полный дифференциал

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz. \tag{A}$$

Радиус-вектор точки $A(x, y, z)$

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

а его дифференциал

$$\overline{dr} = dx \cdot \bar{i} + dy \cdot \bar{j} + dz \cdot \bar{k}.$$

Так как вектор

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \bar{k},$$

то скалярное произведение

$$\overline{dr} \cdot \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz.$$

Сравнивая это выражение с выражением (А) для полного дифференциала функции φ, получаем требуемое равенство:

$$d\varphi = \overline{dr} \cdot \operatorname{grad} \varphi.$$

Отсюда можно сделать заключение, что, если

$$d\varphi = \overline{dr} \cdot \bar{a}, \tag{11,30}$$

то вектор $\bar{a}$ необходимо является градиентом некоторой функции $\varphi = \varphi(x, y, z)$:

$$\bar{a} = \operatorname{grad} \varphi. \tag{11,31}$$

Задача 11,12 (для самостоятельного решения). Найти

$$\operatorname{grad}\left(\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Ответ. $\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}[-xz\bar{i}-yz\bar{j}+(x^2+y^2)\bar{k}]$.

Задача 11,13 (для самостоятельного решения). Найти

$$\operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2).$$

Ответ. $2\bar{r}$.

Задача 11,14 (для самостоятельного решения). Найти градиент скалярного произведения $\bar{r}\cdot\bar{a}$, где $\bar{a}$ — постоянный вектор, а $\bar{r}$ — радиус-вектор точки $A(x, y, z)$ $(\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})$.

Ответ. $\operatorname{grad}(\bar{r}\cdot\bar{a})=\bar{a}$.

Полученный результат указывает на то, что вектор $\operatorname{grad}(\bar{r}\cdot\bar{a})$ во всех точках поля сохраняет постоянное направление, совпадающее с направлением вектора $\bar{a}$.

Кроме общего способа, основанного на применении формулы (11,4) к функции $\varphi=\bar{r}\cdot\bar{a}=a_x\cdot x+a_y\cdot y+a_z\cdot z$, можно также воспользоваться результатом задачи (11,11). У нас функция $\varphi=\bar{r}\cdot\bar{a}$ ($\bar{a}$ — постоянный вектор)

$$d\varphi=d(\bar{r}\cdot\bar{a})=\bar{a}\cdot\overline{dr}.$$

Следовательно, на основании формулы (11,31)

$$\bar{a}=\operatorname{grad}\varphi=\operatorname{grad}(\bar{r}\cdot\bar{a}).$$

Читая это равенство справа налево, получаем требуемое

$$\operatorname{grad}(\bar{r}\cdot\bar{a})=\bar{a}.$$

Задача 11,15. Определить $\operatorname{grad}\varphi(u, v)$, где $u=u(x, y, z)$, $v=v(x, y, z)$.

Решение. Чтобы воспользоваться формулой (11,4), определим частные производные $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ по формуле дифференцирования сложных функций

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}.$$

Умножая обе части каждого из этих равенств соответственно на $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ и почленно складывая их, получим

$$\operatorname{grad}\varphi(u, v) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\operatorname{grad} u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\operatorname{grad} v.$$

Задача 11,16. 1. Найти производную функции $u = u(x, y, z)$ в направлении градиента функции $v = v(x, y, z)$. 2. При каком условии эта производная равна нулю?

Решение. На основании формулы (11,4)

$$\operatorname{grad} v = \frac{\partial v}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\bar{k}.$$

Проекция вектора $\operatorname{grad} v$ на оси прямоугольной системы координат

$$(\operatorname{grad} v)_x = \frac{\partial v}{\partial x};\quad (\operatorname{grad} v)_y = \frac{\partial v}{\partial y};\quad (\operatorname{grad} v)_z = \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ находят, как известно, по формулам

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a};\quad \cos\beta = \frac{a_y}{a};\quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}.$$

Направляющие косинусы вектора $\operatorname{grad} v$ определим по формулам

$$\cos(\operatorname{grad} v, \widehat{\ } x) = \frac{(\operatorname{grad} v)_x}{|\operatorname{grad} v|} = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}}{|\operatorname{grad} v|};$$

$$\cos(\operatorname{grad} v, \widehat{\ } y) = \frac{(\operatorname{grad} v)_y}{|\operatorname{grad} v|} = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial y}}{|\operatorname{grad} v|};$$

$$\cos(\operatorname{grad} v, \widehat{\ } z) = \frac{(\operatorname{grad} v)_z}{|\operatorname{grad} v|} = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial z}}{|\operatorname{grad} v|}.$$

Производную функции $u = u(x, y, z)$ по направлению вектора $\bar{l} = \operatorname{grad} v$, характеризуемому только что определенными косинусами, найдем по формуле (11,3)

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}}{|\operatorname{grad} v|} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\dfrac{\partial v}{\partial y}}{|\operatorname{grad} v|} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\dfrac{\partial v}{\partial z}}{|\operatorname{grad} v|}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial v}{\partial z}}{|\operatorname{grad} v|},$$

а так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\operatorname{grad} u)_x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (\operatorname{grad} u)_y; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = (\operatorname{grad} u)_z;$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = (\operatorname{grad} v)_x; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = (\operatorname{grad} v)_y; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = (\operatorname{grad} v)_z,$$

то числитель последней дроби равен скалярному произведению векторов $\operatorname{grad} u$ и $\operatorname{grad} v$ и тогда окончательно

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} v|}.$$

Теперь переходим ко второму вопросу задачи.

Найденная производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ будет равна нулю, если числитель последней дроби равен нулю, т. е. если

$$\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = 0.$$

Из этого следует, что производная функции $u = u(x, y, z)$ по направлению градиента функции $v = v(x, y, z)$ равна нулю, если векторы $\operatorname{grad} u$ и $\operatorname{grad} v$ перпендикулярны.

Содержание. Векторное поле. Потенциальные векторы. Потенциал векторного поля. Циркуляция вектора. Линейный интеграл. Вихрь вектора.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Векторное поле. Физическое поле называется векторным, если образующее его физическое явление характеризуется вектором (например, поле силы тяжести, поле скоростей).

В случае векторного поля каждой точке P пространства, в котором происходит образовавшее его физическое явление, ставится в соответствие определенный вектор $\bar{a}(P)$, являющийся функцией координат точки, т. е. $\bar{a} = \bar{a}(x, y, z)$.

Вектор $\bar{a}(x, y, z)$ можно представить в виде

$$\bar{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\,\bar{i} + a_y(x, y, z)\,\bar{j} + a_z(x, y, z)\,\bar{k}.$$

Из этого следует, что для полного определения векторного поля требуются три скалярные функции трех независимых переменных x, y и z:

$$a_x(x, y, z);\ a_y(x, y, z);\ a_z(x, y, z) \text{ —}$$

— проекции вектора $\bar{a}(x, y, z)$ на оси прямоугольной системы координат (во всех последующих формулах предполагается, что эти функции непрерывны, однозначны и имеют непрерывные частные производные).

1. Потенциальный вектор. Вектор $\bar{a}$ называется потенциальным, если он является градиентом некоторой скалярной функции $\varphi(x, y, z)$ $(\bar{a} = \operatorname{grad}\varphi)$. Поле потенциального вектора $\bar{a} = \operatorname{grad}\varphi$ называется потенциальным, а скалярная функция φ — *потенциалом* этого поля. В дальнейшем предполагается, что функция φ и ее частные производные до второго порядка включительно непрерывны.

Необходимым и достаточным условием потенциальности вектора $\bar{a}$ является выполнение равенств:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (12,1)$$

Пример. Потенциальным векторным полем является поле силы $\overline{F} = \frac{km}{r^3}\overline{r}$ тяготения, вызываемого материальной точкой массы m, помещенной в начале координат. Здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние произвольной точки пространства $A(x, y, z)$ с массой $m_1 = 1$ до начала координат ($r \neq 0$). Потенциалом этого поля является функция $v = \frac{km}{r}$ (см. задачу 11,3).

2. Циркуляция вектора и линейный интеграл. Циркуляцией Γ_L вектора $\overline{a} = \overline{a}(x, y, z)$ по замкнутой линии L называется интеграл вида

$$\Gamma_L = \oint_L a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz, \tag{12,2}$$

причем, обход замкнутого контура L в правой системе координат должен происходить против движения часовой стрелки.

Если L — незамкнутая кривая, то интеграл в формуле (12,2) называется линейным интегралом вектора $\overline{a}$ и обозначается буквой u

$$u = \int_{(AB)} a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz \tag{12,3}$$

или в векторной форме

$$u = \int_{(AB)} \overline{a} \cdot d\overline{r}, \tag{12,4}$$

где $\overline{dr}$ — дифференциал радиуса-вектора точки, движущейся по кривой AB

$$\overline{dr} = dx \cdot \overline{i} + dy \cdot \overline{j} + dz \cdot \overline{k}.$$

Если вектор $\overline{a}$ — сила, то формула (12,3) определяет работу этой силы при перемещении точки по дуге AB.

3. Векторная линия. Векторной линией векторного поля вектора $\overline{a}$ называется кривая, в каждой точке которой касательная совпадает с направлением вектора $\overline{a}$. Через каждую точку P векторного поля вектора $\overline{a}$ проходит по одной векторной линии.

Дифференциальные уравнения векторных линий записываются так:

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}. \tag{12,5}$$

4. Вихрь вектора. Вихрем вектора, или ротором вектора $\overline{a} = \overline{a}(x, y, z)$, обозначаемым $\operatorname{rot}\overline{a}$, называется вектор, определяемый формулой

$$\operatorname{rot}\overline{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overline{k}. \tag{12,6}$$

Проекции этого вектора на координатные оси равны

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}_x \bar{a} &= \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}; \\ \mathrm{rot}_y \bar{a} &= \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}; \\ \mathrm{rot}_z \bar{a} &= \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}. \end{aligned} \tag{12,7}$$

Модуль вектора $\mathrm{rot}\, \bar{a}$ определяется формулой

$$|\mathrm{rot}\, \bar{a}| = \sqrt{\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)^2}. \tag{12,8}$$

Формулу (12,6) можно записать в виде, удобном для запоминания

$$\mathrm{rot}\, \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \tag{12,9}$$

При этом произведения символов $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$ на a_x, a_y, a_z следует понимать так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot a_y = \frac{\partial a_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \cdot a_x = \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

и т. д.

Задача 12,1. Известно, что безвихревым движением жидкости называется движение, при котором в каждой точке жидкости выполняется условие

$$\mathrm{rot}\, \bar{v} = 0,$$

где вектор $\bar{v} = \bar{v}(x, y, z)$ — скорость жидкости в рассматриваемой точке.

Доказать, что при безвихревом движении жидкости и существовании однозначного потенциала скорости $\bar{v}$ циркуляция скорости $\bar{v}$, взятая по любой замкнутой кривой, равна нулю.

Решение. Обозначим проекции скорости $\bar{v}$ на оси прямоугольной системы координат через v_x, v_y, v_z. Равенство $\mathrm{rot}\, \bar{v} = 0$ на основании формулы (12,6) можно переписать в виде

$$\mathrm{rot}\, \bar{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\bar{k} = 0.$$

Из этого следует, что

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0.$$

Выполнение этих равенств является необходимым и достаточным условием для того, чтобы вектор $\bar{v}$ был потенциальным — см. определение на стр. 286 и формулы (12,1).

Поскольку вектор $\bar{v}$ потенциальный, то существует такая скалярная функция $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — потенциал скорости, что

$$\bar{v} = \operatorname{grad} \varphi$$

(см. определение на стр. 263).
Отсюда

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{A}$$

т. е. если скорость $\bar{v}$ — потенциальный вектор, а функция $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — потенциал скорости, то проекция скорости на координатную ось прямоугольной системы координат равна частной производной от потенциала скорости по соответствующей этой оси координате.

Из (A) следует

$$v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = d\varphi.$$

Линейный интеграл (12,3) по кривой AB от выражения $v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz$

$$\int\limits_{(AB)} v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz = \int\limits_{(AB)} d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A); \tag{B}$$

это значит, что он не зависит от вида кривой, а только от координат ее концов A и B, так как $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ — значение потенциала φ в точках A и B (предполагается однозначность потенциала скорости — функции φ).

Таким образом, линейный интеграл по кривой AB от потенциального вектора равен разности значений потенциала φ в концах кривой, вдоль которой ведется интегрирование.

Если кривая AB — замкнутая, то линейный интеграл в равенстве (B) есть циркуляция скорости, а $\varphi(B) - \varphi(A) = 0$, так как точки A и B в случае замкнутости кривой AB совпадут.

Отсюда следует вывод, что *циркуляция скорости по любой замкнутой кривой при наличии однозначного потенциала равна нулю,* т. е., если $\bar{v} = \operatorname{grad} \varphi$ и φ — однозначная функция, то

$$\oint\limits_{L} v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz = 0.$$

(Предположение об однозначности функции φ является весьма существенным. Если φ — неоднозначная функция, то сделанный вывод не всегда верен).

Замечание. Следует иметь в виду, что теорема о равенстве нулю криволинейного интеграла от потенциального вектора по замкнутому контуру верна только тогда, когда пространство односвязно.

Задача 12,2. Доказать, что если v — потенциальный вектор ($\bar{v} = \operatorname{grad}\varphi$), то вихрь этого вектора равен нулю, т. е. что

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0.$$

Решение. В предыдущей задаче было показано, что из равенства $\operatorname{rot}\bar{v} = 0$ следует, что $\bar{v}$ есть вектор потенциальный, т. е. $\bar{v} = \operatorname{grad}\varphi$. Теперь решаем обратную задачу, т. е. хотим доказать, что если вектор $\bar{v}$ потенциальный, то его вихрь равен нулю.

Итак, дано, что $\bar{v} = \operatorname{grad}\varphi$. Отсюда

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x};\quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y};\quad v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

$$(\operatorname{rot}\bar{v})_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}.$$

Поскольку при ограничениях, наложенных на функцию φ, изменение порядка дифференцирования не изменяет величины ее второй смешанной частной производной, то $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y}$, поэтому $(\operatorname{rot}\bar{v})_x = 0$. Аналогично найдем, что $(\operatorname{rot}\bar{v})_y = 0$ и $(\operatorname{rot}\bar{v})_z = 0$, а отсюда

$$\operatorname{rot}\bar{v} = 0.$$

Так как $\bar{v} = \operatorname{grad}\varphi$, то $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0$.

Заключение. Вихрь потенциального вектора равен нулю.

Задача 12,3. Проекции ускорения частицы жидкости на оси прямоугольной системы координат даются формулами

$$W_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}v_z;$$

$$W_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z}v_z;$$

$$W_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z}v_z.$$

Доказать, что при существовании потенциала скорости ускорение $\bar{W}$ также является потенциальным вектором.

Решение. По условию $\bar{v} = \operatorname{grad}\varphi$, где φ — потенциал скорости. Отсюда

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x};\quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y};\quad v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Дифференцирование обеих частей каждого из этих равенств по x, y, z и t дает

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t};\quad \frac{\partial v_y}{\partial t}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial t};\quad \frac{\partial v_z}{\partial t}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial t};$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2};\quad \frac{\partial v_x}{\partial y}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y};\quad \frac{\partial v_x}{\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z};$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x};\quad \frac{\partial v_y}{\partial y}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2};\quad \frac{\partial v_y}{\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z};$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial x}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x};\quad \frac{\partial v_z}{\partial y}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y};\quad \frac{\partial v_z}{\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Подставляя эти значения в выражения для W_x, W_y, W_z из условия задачи, получим

$$W_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\};$$

$$W_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\};$$

$$W_z=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial t}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}.$$

Замечая, что

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2=v^2,$$

предыдущие равенства перепишем в виде

$$W_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}v^2+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right);$$
$$W_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}v^2+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right);$$
$$W_z=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}v^2+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

и, таким образом, проекции ускорения частиц жидкости являются частными производными по координатам одной и той же функции $\frac{1}{2}v^2+\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, а отсюда на основании определения градиента функции заключаем, что

$$W=\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}v^2+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right).$$

Итак, вектор $\overline{W}$ есть градиент некоторой функции. Это значит, что он вектор потенциальный.

Задача 12,4. Дифференциальное уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0.$$

Доказать, что при потенциальном движении жидкости потенциал скорости — функция φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0.$$

Решение. Если предположить, что движение жидкости потенциальное, то скорость $\overline{v}=\overline{v}(x, y, z)$ жидкости является градиентом некоторой функции φ:

$$\overline{v}=\operatorname{grad}\varphi,$$

а отсюда проекции скорости на оси прямоугольной системы координат равны частным производным потенциала скорости φ по соответствующим этим осям координатам, т. е.

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x};\quad v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y};\quad v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Дифференцируя обе части первого равенства по x, второго — по y, третьего — по z, получим

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2};\quad \frac{\partial v_y}{\partial y}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2};\quad \frac{\partial v_z}{\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Складываем эти равенства почленно:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

По условию задачи левая часть этого равенства есть нуль, следовательно, и правая его часть равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0. \qquad (12,10)$$

Заключение. Потенциал скорости несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа (12,10).

Обычно левая часть этого уравнения обозначается сокращенно через $\Delta\varphi$, поэтому (12,10) записывается так:

$$\Delta\varphi=0. \qquad (12,11)$$

Функция φ, удовлетворяющая этому уравнению, называется гармонической. В случае плоского потенциального движения несжимаемой жидкости уравнение Лапласа (12,11) имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \tag{12,12}$$

Задача 12,5 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $\varphi=\ln r$ удовлетворяет уравнению Лапласа (12,12) ($r=\sqrt{x^2+y^2}$).

Задача 12,6. Дано поле вектора

$$\bar{a}=2x\cdot\bar{i}-y\cdot\bar{j}+z\cdot\bar{k}$$

Найти уравнение векторных линий.

Решение. Дифференциальные уравнения векторных линий имеют вид (12,5). В нашем случае

$$a_x=2x;\quad a_y=-y;\quad a_z=z$$

и система дифференциальных уравнений (12,5) запишется так:

$$\frac{dx}{2x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{z}$$

или

$$1)\ \frac{dx}{2x}=-\frac{dy}{y};\quad 2)\ \frac{dx}{2x}=\frac{dz}{z}.$$

Интегрируя, получаем семейства векторных линий

$$1)\ \frac{1}{2}\ln x=-\ln y+\ln C$$

и

$$2)\ \frac{1}{2}\ln x=\ln z+\ln C_2,$$

а отсюда уже

1) $\ln(\sqrt{x}\,y)=\ln C$; $\sqrt{x}\,y=C$; $xy^2=C^2$; $y^2=\frac{C_1}{x}$, где $C_1=C^2$.

2) $\ln\sqrt{x}=\ln C_2z$; $\sqrt{x}=C_2z$; $x=C_2^2z^2$ или $z^2=C_3x$, где $C_3=\frac{1}{C_2^2}$.

Итак, имеем следующие уравнения семейства векторных линий:

$$y^2=\frac{C_1}{x}\ \text{ и }\ z^2=C_3x.$$

Надо иметь в виду, что начало координат является здесь особой точкой: если $x\to 0$, то $y\to\infty$ при $C_1\neq 0$.

Задача 12,7. Движение жидкости задано проекциями скорости

$$V_x = -ky; \quad V_y = kx,$$

где k — постоянная величина. Требуется найти линии тока и направление движения.

Решение. Если в уравнениях (12,5) a_x, a_y, a_z — проекции скорости частицы жидкости, то эти уравнения при установившемся движении жидкости называются дифференциальными уравнениями линий тока. В каждый данный момент времени каждая частица жидкости, находящаяся на линии тока, имеет скорость, совпадающую по направлению с касательной к этой линии (движение жидкости называется установившимся, если проекция скорости частицы жидкости не зависит от времени).

В нашем случае эти дифференциальные уравнения (12,5) запишутся так:

$$\frac{dx}{-ky} = \frac{dy}{kx}.$$

Отсюда

$$kx\,dx = -ky\,dy.$$

Сокращая на k и интегрируя, получаем

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + \frac{C}{2}$$

или

$$x^2 + y^2 = C$$

— линии тока — семейство концентрических окружностей с центром в начале координат.

Теперь определим направление движения. У нас $V_x = -ky$; $V_y = kx$, поэтому

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{k^2y^2 + k^2x^2}; \quad V = k\sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\cos(\bar{V}, x) = \frac{V_x}{V} = \frac{-ky}{k\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \cos(\bar{V}, x) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\cos(\bar{V}, y) = \frac{V_y}{V} = \frac{kx}{k\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \cos(\bar{V}, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Из равенства $\cos(\bar{V}, x) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ следует, что если $x > 0$ и $y > 0$, то $\cos(\bar{V}, x) < 0$ и скорость $\bar{V}$ с положительным направлением оси Ox образует тупой угол. Это говорит о том, что движение происходит против хода часовой стрелки

Задача 12,7а. Движение жидкости задано проекциями скорости

$$V_x = -x + t; \quad V_y = y + t.$$

Определить:

1. Уравнение семейства линий тока, а также линию тока, проходящую через точку $A(-2, -3)$ в момент времени $t=0$.

2. Траекторию частицы жидкости, которая в момент времени $t=0$ находилась в точке $A(-2, -3)$.

Решение. 1. Дифференциальное уравнение семейства линий тока на основании (12,5) имеет вид

$$\frac{dx}{-x+t}=\frac{dy}{y+t}.$$

Считая t — фиксированным и интегрируя, получим

$$-\ln(-x+t)=\ln(y+t)-\ln C,$$

откуда

$$(t-x)(y+t)=C. \tag{A}$$

Линиями тока в каждый момент времени является семейство гипербол. При $t=0$ это семейство имеет уравнение

$$-xy=C.$$

Подставляя сюда на основании условия задачи координаты точки $A(-2, -3)$, получим $C=-6$. Искомым уравнением линии тока, соответствующим условию задачи, будет

$$xy=6.$$

2. Чтобы ответить на второй вопрос задачи, надо знать следующее:

1. Движение жидкости называется неустановившимся, если проекции скорости V_x, V_y и V_z являются функциями не только координат, но и времени, т. е. если

$$V_x=V_x(x, y, z, t);\; V_y=V_y(x, y, z, t);\; V_z=V_z(x, y, z, t).$$

2. Дифференциальные уравнения траекторий жидкой частицы в этом случае имеют вид

$$\frac{dx}{V_x(x, y, z, t)}=\frac{dy}{V_y(x, y, z, t)}=\frac{dz}{V_z(x, y, z, t)}=dt.$$

Тогда, чтобы получить траекторию частицы жидкости, надо проинтегрировать такую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=V_x(x, y, z, t);\\ \frac{dy}{dt}&=V_y(x, y, z, t);\\ \frac{dz}{dt}&=V_z(x, y, z, t).\end{aligned}\right\}$$

В нашем случае уравнения этой системы запишутся так

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-x+t;\\ \frac{dy}{dt}&=y+t.\end{aligned}\right\}$$

Каждое из них — линейное неоднородное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами.

Перепишем их в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}+x&=t;\\ \frac{dy}{dt}-y&=t.\end{aligned}\right\}$$

Интегрируем эти уравнения по правилам интегрирования линейных дифференциальных уравнений:

$$x=C_1e^{-t}+t-1;\ y=C_2e^{t}-t-1. \tag{B}$$

Подставляем в эти уравнения $t=0$, $x=-2$, $y=3$. Получится, что $C_1=-1$, $C_2=-2$ и уравнения траектории примут вид

$$x=-e^{-t}+t-1;$$
$$y=-2e^{t}-t-1.$$

Замечание. Сравнивая уравнения (А) и (В), видим, что при неустановившемся движении жидкости линии тока не совпадают с траекториями жидкой частицы (при установившемся движении жидкости линии тока являются одновременно и траекториями частиц).

Задача 12,8. (для самостоятельного решения). Поле скоростей жидкости задано следующим образом:

$$V_x=\frac{Q}{4\pi}\cdot\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$V_y=\frac{Q}{4\pi}\cdot\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$V_z=\frac{Q}{4\pi}\cdot\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

где Q — постоянная величина.

Определить линии тока.

Ответ.

$y=C_1x$ (семейство плоскостей, проходящих через ось Oz);

$z=C_2x$ (семейство плоскостей, проходящих через ось Oy).

Линии пересечения плоскостей одного семейства с плоскостями другого семейства — прямые, проходящие через начало координат.

Задача 12,9. (для самостоятельного решения). Напряженность электростатического поля определяется вектором $\frac{e^2}{r^2}\bar{r}^0$, где e — положительный электрический заряд, r — расстояние точки поля до заряда, $\bar{r}^0$ — единичный вектор вектора $\bar{r}$, соединяющего точку поля с зарядом.

Определить векторные линии поля.

Ответ. Лучи, выходящие из заряда.

Задача 12,10. Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью $\bar{\omega}$ вокруг некоторой оси. Известно, что во вращательном движении линейная скорость $\bar{v}$ точек тела определяется по формуле

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

где $\bar{r}$ — радиус-вектор точки $A(x, y, z)$ тела. Найти $\operatorname{rot} \bar{v}$.

Решение. Направим вектор ω по оси вращения, которую примем за ось Oz, в сторону, откуда вращение представляется происходящим против движения часовой стрелки. Проекции векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{r}$ на координатные оси равны:

$$\omega_x = 0; \ \omega_y = 0; \ \omega_z = \omega;$$

$$r_x = x; \ r_y = y; \ r_z = z. \qquad \text{(A)}$$

Так как вектор $\bar{v}$ равен векторному произведению векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{r}$, то

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix}.$$

Подставляя значения проекций векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{r}$ из равенства (A), получаем

$$\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\bar{i} + \omega x\bar{j},$$

откуда следует, что проекции вектора $\bar{v}$ равны:

$$v_x = -\omega y; \ v_y = \omega x; \ v_z = 0.$$

Чтобы воспользоваться формулой (12,6) для определения ротора вектора, найдем входящие в эту формулу частные производные от проекций вектора $\bar{v}$:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\omega; \quad \frac{\partial V_x}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \omega; \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Подставляем эти значения в формулу (12,6):

$$\operatorname{rot} \bar{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \bar{k} = [\omega - (-\omega)] \cdot \bar{k} = 2\omega\bar{k}.$$

Итак,

$$\operatorname{rot} \bar{v} = 2\omega\bar{k}.$$

В связи с тем что вектор $\bar{\omega} = \omega\bar{k}$, приходим к заключению:

$$\operatorname{rot} \bar{v} = 2\bar{\omega},$$

а отсюда следует: *ротор линейной скорости точек вращающегося твердого тела имеет постоянное значение во всех точках тела и равен удвоенной угловой скорости его вращения.*

Задача 12,11 (для самостоятельного решения). Найти векторные линии поля вектора

$$\bar{a} = -\omega y\bar{i} + \omega x\bar{j} + h\bar{k},$$

где ω и h — величины постоянные.

Указания.

1. Уравнения векторных линий запишутся так:

$$\frac{dx}{-\omega y} = \frac{dy}{\omega x} = \frac{dz}{h} = dt$$

или

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y; \quad \frac{dy}{dt} = \omega x; \quad \frac{dz}{dt} = h. \tag{A}$$

2. Из первых двух уравнений получаем, дифференцируя обе части каждого из них по t,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y.$$

3. Общими решениями этих линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами будут:

$$x = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t; \tag{B}$$
$$y = A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t.$$

4. Учесть уравнения (A) и показать, что между произвольными постоянными существуют соотношения

$$B_1 = -A_2; \ B_2 = A_1$$

и тогда уравнения (B) перепишутся так:

$$
\begin{aligned}
x &= A_1 \cos \omega t - A_2 \sin \omega t; \\
y &= A_2 \cos \omega t + A_1 \sin \omega t.
\end{aligned}
\tag{C}
$$

5. Если $A_1 = R\cos\alpha$, а $A_2 = R\sin\alpha$, т. е. $R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_2}{A_1}$, то уравнения ($C$) запишутся так:

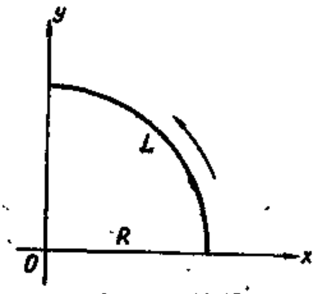
$$
\begin{aligned}
x &= R\cos(\omega t + \alpha); \\
y &= R\sin(\omega t + \alpha).
\end{aligned}
\tag{D}
$$

Третье уравнение системы (A) дает

$$z = ht + A_3. \tag{E}$$

Таким образом, введены только три произвольные R, α и A_3, как и должно быть.

Уравнения (D) и (E) определяют винтовые линии, расположенные на цилиндре радиуса R, ось которого совпадает с осью Oz.



К задаче 12,12

Задача 12,12. Найти линейный интеграл вектора $\bar{a} = x^4\bar{i} - y^4\bar{j}$ вдоль первой четверти окружности

$$x = R\cos t;\ y = R\sin t.$$

Решение. Чтобы найти значение вектора $\bar{a}$ на заданной окружности, заменим в его выражении x на $R\cos t$, а y — на $R\sin t$. Тогда

$$\bar{a} = R^4\cos^4 t \cdot \bar{i} - R^4 \sin^4 t\bar{j}.$$

Отсюда

$$a_x = R^4\cos^4 t;\ a_y = -R^4\sin^4 t. \tag{A}$$

Чтобы воспользоваться формулой (12,3), найдем dx и dy из уравнения окружности

$$x = R\cos t;$$

$$y = R\sin t.$$

Отсюда

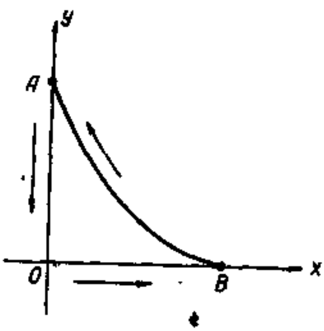
$$
\begin{aligned}
dx &= -R\sin t\,dt; \\
dy &= R\cos t\,dt.
\end{aligned}
\tag{B}
$$

Подставляя значения (A) и (B) в формулу (12,3), получаем, учитывая, что при движении по дуге L параметр t изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$:

$$u = \int_L a_x\,dx + a_y\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4 \cos^4 t\,(-R \sin t)\,dt -$$

$$- R^4 \sin^4 t R \cos t\,dt = R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos^4 t \cdot (-\sin t) - \sin^4 t \cos t]\,dt =$$

$$= R^5 \left(\frac{\cos^5 t}{5} - \frac{\sin^5 t}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = R^5 \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) = -\frac{2}{5} R^5.$$



К задаче 12,14

Задача 12,13 (для самостоятельного решения). Найти линейный интеграл вектора $\bar{a} = x^3\bar{i} - y^3\bar{j}$ вдоль первой четверти окружности $x = R\cos t$; $y = R\sin t$.

Ответ. $u = -\frac{1}{2} R^4$.

Задача 12,14. Найти циркуляцию вектора $\bar{a} = x\bar{i} - y\bar{j}$ вдоль замкнутой кривой, образованной осями координат и первой четвертью астроиды $x = a_1 \cos^3 t$; $y = a_1 \sin^3 t$.

Решение. Линия L в формуле (12,2) состоит из дуги AB астроиды и отрезков AO и OB координатных осей. Поэтому

$$\Gamma_L = \int_L a_x\,dx + a_y\,dy = \int_{BA} a_x\,dx + a_y dy + \int_{AO} a_x\,dx + a_y\,dy +$$
$$+ \int_{OB} a_x\,dx + a_y\,dy.$$

Каждый из этих интегралов вычислим отдельно: при вычислении первого интеграла по дуге астроиды AB следует учесть, что так как

$$\bar{a} = x\bar{i} - y\bar{j}, \text{ то } a_x = x;\ a_y = -y.$$

На астроиде $x = a_1 \cos^3 t$; $y = a_1 \sin^3 t$, поэтому

$$a_x = x = a_1 \cos^3 t;\ a_y = -y = -a_1 \sin^3 t.$$

Из уравнений астроиды определим dx и dy

$$dx = -3a_1 \cos^2 t \sin t\,dt;\ dy = 3a_1 \sin^2 t \cos t\,dt.$$

На дуге астроиды BA при движении от B к A параметр t изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$\int_{\breve{B}A} a_x\,dx + a_y\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_1\cos^3 t\,(-3a_1\cos^2 t\sin t)\,dt -$$
$$- a_1\sin^3 t\,(3a_1\sin^2 t\cos t)\,dt =$$
$$= 3a_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos^5 t\sin t - \sin^5 t\cos t)\,dt =$$
$$= 3a_1^2\left(\frac{\cos^6 t}{6} - \frac{\sin^6 t}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3a_1^2\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) = -a_1^2.$$

На отрезке AO оси Oy имеем: $x = 0$; $dx = 0$; вектор $\bar{a} = -y\bar{j}$; $a_x = 0$; $a_y = -y$, а y изменяется от a_1 до 0

$$\int_{AO} a_x\,dx + a_y\,dy = \int_{a_1}^{0} -y\,dy = -\frac{y^2}{2}\Bigg|_{a_1}^{0} = \frac{a_1^2}{2}.$$

На отрезке OB оси Ox $y = 0$; $dy = 0$; вектор $\bar{a} = x\bar{i}$; $a_x = x$.

$$\int_{OB} a_x\,dx + a_y\,dy = \int_0^{a_1} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{a_1} = \frac{a_1^2}{2}$$

Таким образом,

$$\Gamma_L = -a_1^2 + \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{2} = 0.$$

Задача 12,15 (для самостоятельного решения). Найти циркуляцию вектора $\bar{a} = y^3\bar{i}$ по замкнутой кривой, составленной из верхней половины эллипса

$$x = a\cos t;\ y = b\sin t$$

и отрезка оси Ox.

Указание. На верхней половине эллипса параметр t при движении против хода часовой стрелки изменяется от 0 до π.

Промежуточный результат: $\int_0^{\pi} \sin^3 t\,dt = -\frac{4}{3}$.

Ответ. $\frac{4}{3}ab^3$.

Задача 12,16. Найти $\operatorname{rot}\bar a$, если вектор

$$\bar a = (3x^2y^2z + 3x^2)\,\bar i + 2x^3yz\,\bar j + (x^3y^2 + 3z^2)\,\bar k.$$

Решение. Проекции вектора $\bar a$

$$a_x = 3x^2y^2z + 3x^2;\ a_y = 2x^3yz;\ a_z = x^3y^2 + 3z^2.$$

Применяя формулы (12,7) найдем, что $\operatorname{rot}\bar a = 0$

Задача 12,17 (для самостоятельного решения). Доказать, что поле сил тяготения точечной притягивающей массы, помещенной в начале координат

$$\bar F = -\gamma m\frac{x\bar i + y\bar j + z\bar k}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

является безвихревым, т. е. что $\operatorname{rot}\bar F = 0$.

Указание.

$$F_x = -\gamma m\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$F_y = -\gamma m\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$F_z = -\gamma m\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

ТРИНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Поток векторного поля. Дивергенция вектора. Формула Остроградского.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. **Поверхностные интегралы.** Пусть S — гладкая или кусочно гладкая поверхность, ограниченная определенным контуром, который будем считать ее краем. На такой поверхности будем различать две стороны, понимая под этим следующее: движущаяся по поверхности точка может с одной стороны поверхности перейти на другую не иначе, как пересекая край поверхности.

Одну из этих сторон поверхности назовем внешней (верхней), другую — внутренней (нижней). *Внешней стороной* считается та, которая соответствует положительному направлению оси Oz, *а внутренняя сторона* соответствует отрицательному направлению оси Oz. На нормали к поверхности S можно рассматривать два возможных направления: одно, идущее в сторону возрастающих, другое — в сторону убывающих z-ов. Если на нормали выбрано направление в сторону возрастающих z-ов, то она называется внешней и связывается с внешней стороной поверхности. Нормаль, направленная в сторону убывающих z-ов, называется внутренней и связана с внутренней стороной поверхности S.

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО ТИПА

(поверхностный интеграл по площади поверхности)

Пусть в каждой точке поверхности S задана функция $f(x, y, z)$. Поверхность S разобьем на n частей, площади которых обозначим через ΔS_1, ΔS_2, ... ΔS_n. На каждой такой площадке ΔS_k выберем произвольную точку $A_k(x_k, y_k, z_k)$, вычислим в ней значение заданной функции $f(x, y, z)$, т. е. найдем число $f(x_k, y_k, z_k)$ и составим сумму произведений (интегральную сумму)

$$f(x_1, y_1, z_1)\Delta S_1 + f(x_2, y_2, z_2)\Delta S_2 + \cdots + f(x_n, y_n, z_n)\Delta S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta S_k.$$

Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна во всех точках поверхности S, то предел этой интегральной суммы при условии, что максимальный диаметр частей ΔS_k стремится к нулю, существует и не зависит от способа разбиения поверхности S на части и выбора точки A_k на каждой из этих частей. Этот предел называется поверхностным интегралом первого типа от $f(x, y, z)\,dS$, распространенным на поверхность S, и обозначается символом

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,ds.$$

Таким образом,

$$\lim_{\substack{\max \Delta S_k \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\,\Delta S_k = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dS.$$

Формула для вычисления поверхностного интеграла первого рода

Если поверхность S определяется уравнением $z = \varphi(x, y)$, σ — ее проекция на плоскость xOy, а γ — угол между внешней нормалью к поверхности S и положительным направлением оси Oz, то имеет место формула

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dS = \iint\limits_{(\sigma)} f[x, y, \varphi(x, y)]\,\frac{d\sigma}{\cos\gamma}. \qquad (13,1)$$

Косинус угла γ между внешней нормалью к поверхности, определяемой уравнением $z = \varphi(x, y)$, и осью Oz вычисляется по формуле

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Формула (13,1) с этим значением $\cos\gamma$ перепишется так:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dS = \iint\limits_{(\sigma)} f[x, y, \varphi(x, y)]\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,d\sigma. \qquad (13,2)$$

Косинусы углов α и β между внешней нормалью к поверхности $z = \varphi(x, y)$ и осями Ox и Oy соответственно равны:

$$\cos\alpha = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \qquad (13,3)$$

$$\cos\beta = -\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}. \qquad (13,4)$$

Если S — замкнутая поверхность, то поверхностный интеграл первого рода обозначается символом $\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,ds$.

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВТОРОГО ТИПА

(поверхностный интеграл по координатам)

Пусть $f(x, y, z)$ — функция, заданная в каждой точке поверхности S. Разобьем поверхность S на n частей с площадями ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n.

На каждой из этих частей выберем произвольную точку $A_k(x_k, y_k, z_k)$ и вычислим в ней функцию $f(x, y, z)$, т. е. найдем число $f(x_k, y_k, z_k)$. Спроектируем все площади ΔS_k, на которые разбита поверхность S, на плоскость xOy и обозначим площади этих проекций соответственно через $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, ..., $\Delta\sigma_n$. Если была выбрана внешняя сторона поверхности S, то эти проекции будем брать со знаком плюс. Если же выбрана нижняя сторона поверхности S, то возьмем знак минус. Составим интегральную сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\,\Delta\sigma_k$.

Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в каждой точке поверхности S, то ее предел при условии, что $\max \Delta S_k \to 0$ существует, называется поверхностным интегралом второго типа от $f(x, y, z)\,d\sigma$, распространенным на выбранную сторону поверхности (S), и обозначается символом

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,d\sigma \text{ или } \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy.$$

Таким образом,

$$\lim_{\substack{\max \Delta S_k \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy.$$

При замене выбранной стороны поверхности S противоположной ее стороной знак интеграла поменяется на противоположный, а его абсолютная величина сохранится прежней.

Если элементы, на которые разбита поверхность S, проектировать на плоскость xOz и yOz, то получаются соответственно два интеграла

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dz \text{ и } \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dy\,dz.$$

Если $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ — функции, определенные во всех точках поверхности S, то под составным поверхностным интегралом второго типа понимается интеграл вида

$$\iint\limits_{(S)} P(x, y, z)\,dy\,dz + Q(x, y, z)\,dz\,dx + R(x, y, z)\,dx\,dy.$$

Подчеркиваем еще раз, что поверхность S является двусторонней, а интеграл распространяется на ее определенную сторону, причем указание этой стороны следует всякий раз оговаривать.

Поверхностный интеграл второго типа вычисляют по формуле

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{(\sigma)} f[x, y, \varphi(x, y)]\,dx\,dy, \tag{13,5}$$

в которой $z = \varphi(x, y)$ — уравнение поверхности S, а (σ) — проекция поверхности S на плоскость xOy.

Если S — часть цилиндрической поверхности с образующими, параллельными осями Oz, то все ее элементы имеют проекции на плоскость xOy, равные нулю, поэтому

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy = 0. \tag{13,6}$$

Общая формула, по которой поверхностный интеграл *второго типа сводится к поверхностному интегралу первого типа* записывается так:

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_{(S)} [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]\,dS, \tag{13,7}$$

где P, Q и R — ограниченные функции, определенные во всех точках поверхности S, а $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали, направление которой соответствует выбранной стороне поверхности.

2. **Поток вектора.** Потоком вектора $\bar{a}$ через поверхность S называется скаляр, определяемый формулой

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} a_n\,ds, \tag{13,8}$$

где a_n — проекция вектора $\bar{a}$ на нормаль к поверхности S, причем нормаль берется определенная — внешняя или внутренняя.

Проекцию вектора $\bar{a}$ на нормаль к поверхности находят по формуле

$$a_n = a_x\cos(\bar{n}, x) + a_y\cos(\bar{n}, y) + a_z\cos(\bar{n}, z). \tag{13,9}$$

где $\cos(\bar{n}, x)$, $\cos(\bar{n}, y)$, $\cos(\bar{n}, z)$ — направляющие косинусы нормали к поверхности S, поэтому (13,8) можно записать в виде

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} [a_x\cos(\bar{n}, x) + a_y\cos(\bar{n}, y) + a_z\cos(\bar{n}, z)]\,ds. \tag{13,10}$$

Учитывая, что

$$\cos(\hat{n},\ x)\,ds = dy\,dz;\ \cos(\hat{n},\ y)\,ds = dz\,dx;\ \cos(\hat{n},\ z)\,ds = dx\,dy; \tag{13,10$_1$}$$

формулу (13,10) запишем так:

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} a_x\,dy\,dz + a_y\,dz\,dx + a_z\,dx\,dy. \tag{13,11}$$

В векторной форме (13,10) запишется в виде

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} (\bar{a}\cdot\bar{n})\,ds, \tag{13,12}$$

где $\bar{n}$ — единичный вектор нормали, направленной от отрицательной стороны поверхности к положительной (поверхность обыкновенно ориентируют так, что ее внешнюю сторону считают положительной, а внутреннюю — отрицательной). В случае замкнутой поверхности вектор $\bar{n}$ — единичный вектор внешней нормали.

3. **Дивергенция.** Дивергенцией (расхождением) поля вектора $\bar{a} = \bar{a}(x,\ y,\ z)$, обозначаемой $\operatorname{div}\bar{a}$, называется скалярная величина, определяемая формулой

$$\operatorname{div}\bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{13,13}$$

Из этого определения видно, что дивергенция вектора $\bar{a}$ — величина скалярная и ее определение связано с выбором координатной системы. Ниже в связи с формулой Остроградского дается другое определение дивергенции вектора $\bar{a}$, которое устраняет этот недостаток.

Термин «поток вектора» имеет физическое происхождение. Укажем примеры физических величин, которые вычисляются при помощи формулы (13,11):

а) Если векторное поле рассматривать как поле скоростей движущейся жидкости, то поток ее Π через поверхность S равен количеству жидкости, протекающей через поверхность S в единицу времени в направлении от отрицательной к положительной стороне поверхности. Если поток через замкнутую поверхность S положителен, то это значит, что из части пространства, ограниченной поверхностью S, вытекает больше жидкости, чем втекает в нее. Это объясняется тем, что внутри S имеются и с т о ч н и к и, выделяющие жидкость.

Если поток отрицателен, то внутрь поверхности S втекает больше жидкости, чем вытекает из нее. Это означает, что внутри S имеются *стоки*, поглощающие жидкость.

б) Поток тепла имеет направление и является векторной величиной. Обозначим вектор потока тепла через $\bar{a}$. Его длина измеряет количество тепла, протекшего сквозь единицу площади в единицу времени. Полный тепловой поток наружу через поверхность S определяется также по формуле (13,11).

4. Формула Остроградского. Формулой Остроградского называется формула

$$\iiint\limits_{(v)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv = \iint\limits_{(s)}[P\cos(\bar{n}, x)+Q\cos(\bar{n}, y)+R\cos(\bar{n}, z)]\,ds. \tag{13,14}$$

Здесь: $\cos(\bar{n}, x)$, $\cos(\bar{n}, y)$, $\cos(\bar{n}, z)$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности s, ограничивающей объем v; P, Q, и R — сокращенное обозначение функций $P=P(x, y, z)$; $Q=Q(x, y, z)$; $R=R(x, y, z)$, которые предполагаются определенными в объеме v и непрерывными вместе с их частными производными первого порядка.

Формула (13,14) позволяет преобразовать интеграл, распространенный на некоторый объем v, в интеграл по поверхности s, которая ограничивает этот объем.

В другом виде с учетом $(13,10_1)$ формула Остроградского записывается так:

$$\iiint\limits_{(v)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv = \iint\limits_{(s)}P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy. \tag{13,15}$$

Если $\bar{a}=\bar{a}(x, y, z)$ — вектор, проекции которого на координатные оси равны a_x, a_y, a_z и $a_x=P(x, y, z)$; $a_y=Q(x, y, z)$; $a_z=R(x, y, z)$, то формула (13,7) запишется так:

$$\iiint\limits_{(v)}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dv = \iint\limits_{(s)}[a_x\cos(\bar{n}, x)+a_y\cos(\bar{n}, y)+a_z\cos(\bar{n}, z)]\,ds. \tag{13.16}$$

Формула Остроградского (13,14) в векторной форме (если ее прочесть справа налево):

$$\iint\limits_{(s)}a_n\,ds=\iiint\limits_{(v)}\operatorname{div}\bar{a}\,dv, \tag{13,17}$$

т. е. поток вектора $\bar{a}$, являющегося непрерывной функцией точки, через произвольную замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции этого вектора по объему, ограниченному этой поверхностью. Формула (13,17) выражает поток вектора через замкнутую поверхность через значения дивергенции этого вектора в точках, лежащих внутри поверхности.

В теории векторного поля формулы (13,16) и (13,17) имеют исключительно важное значение.

Левая часть формулы (13,17) определяет поток вектора $\bar{a}$ через замкнутую поверхность S — см. формулу (13,8).

Отсюда следует, что **поток вектора $\bar{a}$ через замкнутую поверхность S равен интегралу от дивергенции вектора, взятому по объему, ограниченному поверхностью S.**

Теперь мы можем дать определение дивергенции вектора в точке M объема V, не зависящее от выбора координатной системы.

Поток векторного поля через замкнутую поверхность S называют также производительностью той части пространства V, которая ограничена поверхностью S. Если найти отношение потока Π через поверхность S к величине объема V, ограниченного этой поверхностью, то мы получим среднюю производительность во всей области V. Чтобы оценить производительность в точке M объема V, необходимо вычислить среднюю производительность во все меньших и меньших областях, окружающих точку M. Переходя к пределу, стягивая объем такой малой области в точку, мы получим число, характеризующее производительность векторного поля в окрестности точки M. Это число и называется дивергенцией векторного поля в точке M.

Дивергенцией векторного поля вектора $\bar{a}$ в точке M называется предел, к которому стремится отношение потока через замкнутую поверхность, окружающую точку M, к объему области, ограниченной этой поверхностью. Этот предел вычисляется при стягивании объема V в точку M.

Таким образом,

$$\operatorname{div} \bar{a} = \lim_{V \to M} \frac{\iint\limits_{(s)} (\bar{a} \cdot \bar{n})\, ds}{V}. \qquad (13,18)$$

В этой форме определение дивергенции не зависит от выбора координатной системы. Те точки векторного поля, в которых дивергенция положительна, называются *источниками*, а те, в которых она отрицательна, — *стоками*. Эти термины объясняются гидродинамическим истолкованием векторного поля. Если около точки, являющейся источником, описать достаточно малую поверхность, то поток через эту поверхность окажется положительным и жидкость будет вытекать наружу.

Задача 13,1. Вычислить интеграл $I = \iint\limits_{(s)} (x^2 + y^2)\, z ds$, где S — верхняя половина сферы радиуса R с центром в начале координат.

Решение. Заданный интеграл принадлежит к поверхностным интегралам первого типа. Его следует вичислить по формуле (13,2). Поверхность S определяется уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \qquad (A)$$

(перед корнем удержан знак плюс потому, что рассматривается верхняя часть поверхности сферы).

Теперь вычислим $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$, входящий в формулу (13,2).

Из (А) следует, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}};$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}.$$

Искомый интеграл после подстановки $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ перепишется по формуле (13,2) так:

$$I=\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2)\,z\,ds=R\iint\limits_{(\sigma)}(x^2+y^2)\sqrt{R^2-x^2-y^2}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,d\sigma=R\iint\limits_{(\sigma)}(x^2+y^2)\,d\sigma.$$

Перейдем к полярным координатам. В них

$$x^2+y^2=\rho^2, \text{ а } d\sigma=\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Поэтому

$$I=\iint\limits_{(\sigma)}\rho^2\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Так как σ — проекция S на плоскость xOy, то σ — круг радиуса R, ограниченный окружностью $x^2+y^2=R^2$. Переменные ρ и φ изменяются в таких пределах: ρ от 0 до R, φ от 0 до 2π

$$0\leqslant\rho\leqslant R;$$
$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

Поэтому

$$I=R\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\rho^3\,d\rho=R\cdot\frac{R^4}{4}\cdot 2\pi=\frac{\pi R^5}{2}.$$

Задача 13,2. Вычислить поверхностный интеграл

$$I=\iint\limits_{(S)}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\,ds,$$

где S — часть параболоида $z=x^2+y^2$, ограниченная плоскостью $z=a$ $(a>0)$.

Решение. Заданный интеграл — поверхностный интеграл первого типа. Применим для его вычисления формулу (13,2). Из уравнения поверхности $z=x^2+y^2$ найдем $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и вычислим $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$, входящий в эту формулу:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y;$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}.$$

Подставляя это значение корня и заменяя z на x^2+y^2 в (13,2), получим

$$I=\iint\limits_{(\sigma)}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,d\sigma,$$

где σ — проекция поверхности S на поскость xOy. Эта проекция — круг радиуса a. Его ограничивает окружность $x^2+y^2=a^2$.

$$I=\iint\limits_{(\sigma)}\frac{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{\frac{1+4(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}\,d\sigma.$$

И здесь выгодно перейти к полярным координатам, в которых

$$x^2+y^2=\rho^2;\quad d\sigma=\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Поэтому

$$I=\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{\frac{1+4\rho^2}{\rho^2}}\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho.$$

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^a\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\sqrt{1+4a^2}+\frac{1}{2}\ln\left|2a+\sqrt{1+4a^2}\right|\right).$$

Указание.

$$\int\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho=\int\frac{1+4\rho^2}{\sqrt{1+4\rho^2}}\,d\rho=\int\frac{d\rho}{\sqrt{1+4\rho^2}}+4\int\frac{\rho^2}{\sqrt{1+4\rho^2}}\,d\rho,$$

а $\int\frac{\rho^2\,d\rho}{\sqrt{1+4\rho^2}}$ взять по частям, полагая $u=\rho$; $dv=\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{1+4\rho^2}}$.

Ответ. $I=\pi\left(\frac{a}{2}\sqrt{1+4a^2}+\frac{1}{2}\ln\left|2a+\sqrt{1+4a^2}\right|\right)$.

Задача 13,8 (для самостоятельного решения). Вычислить поверхностный интеграл первого типа

$$I=\iint\limits_{(S)}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,ds,$$

где S — поверхность конуса $z^2 = x^2 + y^2$, ограниченного сверху плоскостью $z = h$.

Указание. Воспользоваться формулой (13,2). После замены под корнем z^2 на $x^2 + y^2$ и вычисления $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{dy}\right)^2}$ (учесть, что $z = \sqrt{x^2 + y^2}$) должно получиться

$$I = 2 \iint\limits_{(\sigma)} (x^2 + y^2)\, d\sigma.$$

Перейти к полярным координатам.

Ответ. $I = \frac{4\pi h^3}{3}$.

Задача 13,4. Найти поверхностный интеграл первого типа

$$I = \iint\limits_{(S)} z^2\, ds,$$

где S — полная поверхность тетраэдра, отсекаемого от первого октанта плоскостью $x + y + z = 1$.

Решение. Здесь поверхность S составлена из четырех частей. Значение величины ds в формуле (13,2) ниже указано для каждой из этих частей:

S_1 — треугольник в плоскости xOy: $z = 0$; $ds = dx\, dy$. Он ограничен осями Ox, Oy и прямой $x + y = 1$.

S_2 — треугольник в плоскости xOz: $y = 0$; $dz = dx\, dz$. Он ограничен осями Ox, Oz и прямой $x + z = 1$; $z = 1 - x$.

S_3 — треугольник в плоскости yOz: $x = 0$; $ds = dy\, dz$. Он ограничен координатными осями Oy, Oz и прямой $y + z = 1$; $z = 1 - y$.

S_4 — заданная плоскостью, на которой $z = 1 - x - y$; $ds = \sqrt{3}\, dx\, dy$, так как $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = -1$, а $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{3}$, поэтому

$$I = \iint\limits_{(S)} z^2\, ds = \iint\limits_{(S_1)} z^2\, ds + \iint\limits_{(S_2)} z^2\, ds + \iint\limits_{(S_3)} z^2\, ds + \iint\limits_{(S_4)} z^2\, ds.$$

Учитывая значение ds на каждой из частей и заменяя в последнем интеграле z на $1 - x - y$, а ds на $\sqrt{3}\, dx\, dy$ и вычисляя отдельно каждый из четырех этих интегралов, получаем:

$$1) \quad \iint\limits_{(S_1)} z^2\, ds = \iint\limits_{(S_1)} 0 \cdot dx\, dy = 0;$$

2) $$\iint\limits_{(S_2)} z^2\,ds = \iint\limits_{(S_2)} z^2\,dx\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} z^2\,dz = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 (1-x)^3\,dx = \frac{1}{12};$$

3) $$\iint\limits_{(S_3)} z^2\,ds = \iint\limits_{S_3} z^2\,dy\,dz = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} z^2\,dz = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 (1-y)^3\,dy = \frac{1}{12};$$

4) $$\iint\limits_{(S_4)} z^2\,ds = \iint\limits_{(\sigma)} (1-x-y)^2\sqrt{3}\,dx\,dy =$$

$$= \sqrt{3}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)^2\,dy = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

Окончательно

$$I = 0 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{12}.$$

Задача 13,5. Вычислить поверхностный интеграл второго типа

$$I = \iint\limits_{(S)} \frac{y^2}{z}\,dx\,dy$$

по верхней стороне нижней половины сферы радиуса a.

Решение. Уравнение сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$. На нижней половине сферы $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Проекция этой сферы на плоскость xOy есть круг радиуса a, ограниченный окружностью $x^2+y^2=a^2$. Применяя формулу (13,5) и заменяя под знаком интеграла z на $-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, получаем

$$I = -\iint\limits_{(\sigma)} \frac{y^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy,$$

где σ — проекция сферы на плоскость xOy. Перейдем в полярные координаты: $x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$, элементы же площади $dx\,dy$ надо заменить на $\rho\,d\rho\,d\varphi$. Тогда

$$I = -\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\rho^2\sin^2\varphi}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,\rho\,d\rho\,d\varphi;$$

$$I = -\int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi \int\limits_0^a \frac{\rho^3}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,d\rho.$$

Внутренний интеграл вычисляем по частям

$$\int_0^a \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} d\rho = -\rho^2\sqrt{a^2-\rho^2}\Big|_0^a + \int_0^a 2\rho\sqrt{a^2-\rho^2}\,d\rho =$$

$$\left|\begin{array}{c|c} u=\rho^2 & du = 2\rho\,d\rho \\ dv = \dfrac{d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} & v = -\sqrt{a^2-\rho^2} \end{array}\right|$$

$$= -\frac{2(a^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^a = \frac{2}{3}a^3.$$

Поэтому

$$I = -\frac{2}{3}a^3\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi = -\frac{2}{3}a^3\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= -\frac{2}{3}a^3\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = -\frac{2}{3}a^3\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = -\frac{2}{3}\pi a^3.$$

Задача 13,6. Вычислить поверхностный интеграл второго типа

$$I = \iint\limits_{(S)} \frac{x^2y^2}{z^2}\,dx\,dy,$$

где S — поверхность конуса $z^2 = x^2+y^2$, ограниченная плоскостью $z=h$.

Решение. Применяя формулу (13,5) и заменяя z^2 на x^2+y^2, получаем

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

где σ — круг, являющейся проекцией поверхности S на плоскость xOy, ограниченный окружностью $x^2+y^2=h^2$. После перехода к полярным координатам

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{(\rho\cos\varphi)^2\cdot(\rho\sin\varphi)^2}{\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \iint\limits_{(\sigma)} \sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\cdot\rho^3\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^h \rho^3\,d\rho.$$

Интеграл

$$\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)^2 d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\,d\varphi =$$

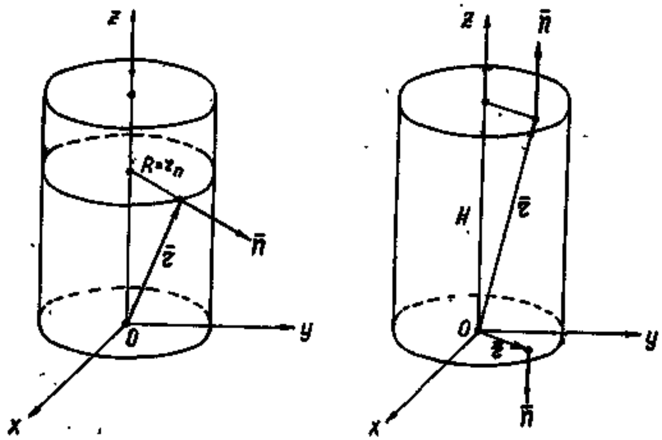
$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}d\varphi = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{8}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $I = \frac{\pi h^4}{16}$.

Задача 13,7. Определить поток вектора $\bar{r}$ — радиуса-вектора точки через полную поверхность прямого кругового цилиндра, если нижнее основание цилиндра лежит в плоскости xOy, его центр находится в начале координат, радиус основания цилиндра равен R, высота его H.

Решение. При решении задачи воспользуемся формулой (13,8). Через полную поверхность цилиндра поток

$$\Pi_{\text{полн. пов.}} = \Pi_{\text{бок. пов.}} + \Pi_{\text{нижн. осн.}} + \Pi_{\text{верхн. осн.}} \qquad (A)$$



К задаче 13,7

1. При вычислении потока через боковую поверхность цилиндра следует учесть, что внешняя нормаль к этой поверхности в любой ее точке перпендикулярна оси Oz, а потому проекция r_n радиуса-вектора $\bar{r}$ на нормаль к боковой поверхности цилиндра равна радиусу цилиндра, т. е. $r_n = R$ и тогда

$$\Pi_{\text{бок. пов.}} = \iint\limits_{\substack{(\text{бок.}\\ \text{пов.})}} r_n\,ds = \iint\limits_{\substack{(\text{бок.}\\ \text{пов.})}} R\,ds = R\iint\limits_{\substack{(\text{бок.}\\ \text{пов.})}} ds = R\cdot 2\pi RH,$$

так как $\iint\limits_{\substack{(\text{бок.}\\ \text{пов.})}} ds$ равен боковой поверхности цилиндра. Окончательно

$$\Pi_{\text{бок. пов.}} = 2\pi R^2 H.$$

2. На нижнем основании цилиндра вектор $\bar{r}$ перпендикулярен вектору $\bar{n}$ — внешней нормали нижнего основания, а потому про-

екция вектора r на внешнюю нормаль n равна нулю, т. е. $r_n = 0$ и

$$П_{\text{нижн. осн.}} = \iint\limits_{\substack{(\text{нижн.}\\ \text{осн.})}} r_n \, ds = 0.$$

3. На верхнем основании внешняя нормаль к нему параллельна оси Oz и имеет то же направление, что и ось Oz, поэтому проекция радиуса-вектора r точек верхнего основания цилиндра на внешнюю нормаль равна высоте цилиндра H и

$$П_{\text{верхн. осн.}} = \iint\limits_{\substack{(\text{верхн.}\\ \text{осн.})}} r_n \, ds = \iint\limits_{\substack{(\text{верхн.}\\ \text{осн.})}} H \, ds = H \iint\limits_{\substack{(\text{верхн.}\\ \text{осн.})}} ds = H \cdot \pi R^2 = \pi R^2 H,$$

так как $\iint\limits_{\substack{(\text{верхн.}\\ \text{осн.})}} ds$ равен площади верхнего основания, т. е. πR^2.

Подставляя найденные значения потоков через боковую поверхность цилиндра, его нижнее и верхнее основание в (А), получим поток через полную поверхность цилиндра

$$П = 3\pi R^2 H.$$

Задача 13,8. Определить поток радиуса-вектора $\bar{r}$ точки через прямой круговой конус, основание которого лежит в плоскости xOy, ось совпадает с осью Oz, радиус основания равен R, высота — H.

Решение. Через полную поверхность конуса поток

$$П_{\text{полн. пов. кон.}} = П_{\text{бок. пов. кон.}} + П_{\text{осн. кон.}}.$$

Очевидно, что поток вектора $\bar{r}$ через основание конуса равен нулю, так как на основании конуса вектор $\bar{r}$ перпендикулярен к нормали основания.

Проекцию радиуса-вектора $\bar{r}$ на нормаль к боковой поверхности найдем по формуле (13,9). У нас

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

поэтому

$$r_n = x\cos(\bar{n}, x) + y\cos(\bar{n}, y) + z\cos(n, z)$$

и по формуле (13,10)

$$П_{\text{бок. пов. кон}} = \iint\limits_{\substack{(\text{бок.}\\ \text{пов.}\\ \text{кон.})}} [x\cos(\bar{n}, x) + y\cos(\bar{n}, y) + z\cos(\bar{n}, z)]\, ds =$$

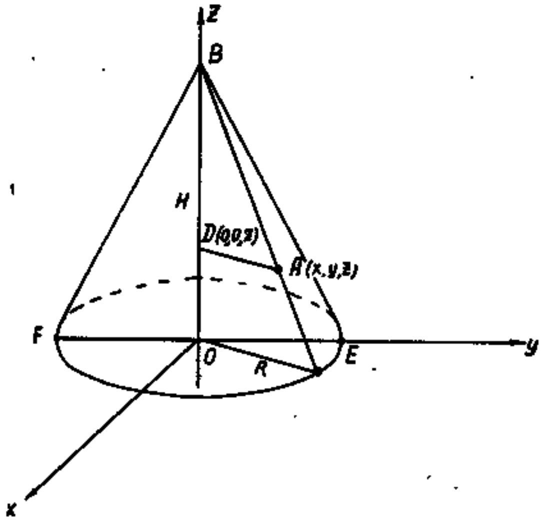
$$= \iint\limits_{\substack{(\text{бок.}\\ \text{пов.}\\ \text{кон})}} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy.$$

Остается вычислить интегралы:

$$\iint\limits_{\substack{\text{(бок.}\\ \text{пов.}\\ \text{кон)}}} x\,dy\,dz; \quad \iint\limits_{\substack{\text{(бок.}\\ \text{пов.}\\ \text{кон)}}} y\,dz\,dx; \quad \iint\limits_{\substack{\text{(бок.}\\ \text{пов.}\\ \text{кон)}}} z\,dx\,dy. \qquad (A)$$

Найдем уравнение поверхности конуса. Если на конусе взять произвольную точку $A(x, y, z)$, то из подобия треугольников BOC и ABD следует, что

$$\frac{R}{H} = \frac{AD}{BD}, \text{ но } AD = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad BD = H - z$$



К задаче 13,8

и тогда

$$\frac{R}{H} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{H - z}.$$

Отсюда уравнение поверхности конуса:

$$z = H\left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right). \qquad (B)$$

Последний из интегралов в (A), если в него подставить z из уравнения (B), приведется к виду

$$\iint\limits_{\substack{\text{(бок.}\\ \text{пов.}\\ \text{кон)}}} z\,dx\,dy = \iint\limits_{\substack{\text{(осн.}\\ \text{кон)}}} H\left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right) dx\,dy,$$

причем $dx\,dy$ есть проекция элемента ds поверхности конуса на плоскость xOy и интегрирование будет вестись по проекции поверхности конуса на эту плоскость, т. е. по основанию конуса.

Если перейти к полярным координатам, то, учитывая, что в них $\sqrt{x^2+y^2}=\rho$, а элемент площади $ds=\rho\,d\rho\,d\varphi$, получим

$$\iint\limits_{\substack{(\text{осн.}\\ \text{кон})}} H\left(1-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right)dx\,dy = H\iint\limits_{\substack{(\text{осн}\\ \text{кон.})}}\left(1-\frac{\rho}{R}\right)\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$=H\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\left(1-\frac{\rho}{R}\right)\rho\,d\rho = H\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{R^2}{2}-\frac{R^2}{3}\right)d\varphi = \frac{R^2H}{6}\cdot 2\pi = \frac{1}{3}\pi R^2H.$$

Два других интеграла (А) вычислить самостоятельно.

При вычислении $\iint\limits_{\substack{(\text{бок.}\\ \text{пов.}\\ \text{кон})}} x\,dy\,dz$ учесть, что областью интегрирования явится проекция боковой поверхности конуса на плоскость yOz, т. е. треугольник BEF. Множитель x, входящий в подынтегральное выражение, определить из уравнения (B) поверхности конуса.

$$x=\pm\sqrt{R^2\left(1-\frac{z}{H}\right)^2-y^2}. \tag{C}$$

Уравнения сторон BE и BF треугольника BEF получаются из уравнения (В) поверхности конуса как уравнения линий пересечения поверхности конуса с плоскостью yOz (уравнение этой плоскости $x=0$).

$$(BE)\ y=+R\left(1-\frac{z}{H}\right);$$

$$(BF)\ y=-R\left(1-\frac{z}{H}\right).$$

В выражении (С) для x возьмем знак плюс перед корнем. Желая вычислить $\iint\limits_{\substack{(\text{бок.}\\ \text{пов.}\\ \text{кон})}} x\,dy\,dz$ по всей боковой поверхности конуса и считая $x=+\sqrt{R^2\left(1-\frac{z}{H}\right)^2-y^2}$, мы должны будем вследствие симметрии поверхности конуса относительно плоскости yOz полученный результат удвоить, т. е.

$$\iint\limits_{\substack{\text{(бок. пов.}\\ \text{кон)}}} x\,dy\,dz = 2\iint\limits_{\Delta BEF} x\,dy\,dz =$$

$$= 2\int\limits_0^H dz \int\limits_{-R\left(1-\frac{z}{H}\right)}^{R\left(1-\frac{z}{H}\right)} \sqrt{R^2\left(1-\frac{z}{H}\right)^2 - y^2}\,dy = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

При вычислении внутреннего интеграла использована формула

$$\int\sqrt{a^2-t^2}\,dt = \frac{t}{2}\sqrt{a^2-t^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{t}{a} + C,$$

причем принято, что $a^2 = R^2\left(1-\frac{z}{H}\right)^2$. Вычисление последнего интеграла тем же путем даст

$$\iint\limits_{\substack{\text{(бок.}\\ \text{пов.}\\ \text{кон.)}}} y\,dx\,dz = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

и тогда окончательно поток

$$\Pi_{\text{полн. пов. кон.}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H + \frac{1}{3}\pi R^2 H + \frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

т. е.

$$\Pi_{\text{полн. пов. кон.}} = \pi R^2 H.$$

Мы решили эту задачу, не прибегая к формуле Остроградского. Используем ее и убедимся, что это значительно сэкономит вычисления. Поток вектора через замкнутую поверхность S находят по формуле Остроградского (13,17).

Применим эту формулу для случая, когда вектором является радиус-вектор точки $\bar r = x\bar i + y\bar j + z\bar k$. На основании (13,13)

$$\operatorname{div}\bar a = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

а потому

$$\operatorname{div}\bar r = \frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z}.$$

Но $r_x = x$; $r_y = y$; $r_z = z$, поэтому

$$\frac{\partial r_x}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial r_y}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial r_z}{\partial z} = 1.$$

Значит, для радиуса-вектора $\bar{r}$: $\operatorname{div}\bar{r} = 3$.

Интересующий нас поток радиуса-вектора $\bar{r}$ через замкнутую поверхность будет равен на основании формулы (13,17)

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} \bar{r}_n\, ds = \iiint\limits_{(v)} \operatorname{div}\bar{r}\, dv = \iiint\limits_{(v)} 3dv = 3\iiint\limits_{(v)} dv = 3v, \quad (13,19)$$

т. е. поток радиуса-вектора точки через замкнутую поверхность S равен утроенному объему, ограниченному этой поверхностью.

Для потока через полную поверхность конуса, рассматриваемого в этой задаче, имеем, учитывая, что объем конуса $v = \frac{1}{3}\pi R^2 H$,

$$\Pi_{\text{полн. пов. кон.}} = 3 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 H = \pi R^2 H.$$

Получен тот же результат, что и раньше, но со значительно меньшей затратой труда, притом получен и дополнительный результат.

В задаче 13,1 поток радиуса-вектора точки через полную поверхность прямого кругового цилиндра $\Pi = 3\pi R^2 H$, *т. е. поток радиуса-вектора точки через полную поверхность прямого кругового цилиндра равен утроенному объему цилиндра*, как это следует и из формулы (13,19).

Формулу (13,19) можно истолковать так: если в установившемся потоке несжимаемой жидкости скорость любой частицы равна ее радиусу-вектору, то количество жидкости, вытекающее из какого-либо тела за единицу времени, равно утроенному объему этого тела.

Задача 13,9. Доказать, что если во всех точках некоторого объема v, ограниченного поверхностью S, дивергенция вектора $\bar{a}$ равна нулю, то поток вектора $\bar{a}$ через поверхность S равен нулю.

Решение. По формуле (13,10) поток вектора

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} a_n\, ds = \iiint\limits_{(v)} \operatorname{div}\bar{a}\, dv = \iiint\limits_{(v)} 0 \cdot dv = 0.$$

Вектор $\bar{a}$, для которого дивергенция равна нулю, называется соленоидальным.

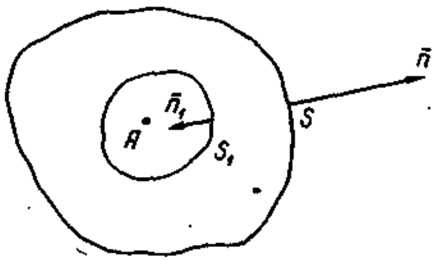
Задача 13,10. Доказать, что если во всех точках некоторого объема V, кроме одной точки A, дивергенция вектора равна нулю, то поток этого вектора через замкнутую поверхность, окружающую точку A, не зависит от формы этой поверхности.

Решение. Пусть во всех точках объема V, кроме точки A, дивергенция вектора $\bar{a}$ равна нулю: $\operatorname{div}\bar{a}=0$. Окружим точку A поверхностью (S_1) (см. чертеж). Тогда по условию задачи всюду в объеме, заключенном между поверхностями S и S_1, $\operatorname{div}\bar{a}=0$, а поток вектора $\bar{a}$ через поверхность $S+S_1$ равен нулю на основании результата предыдущей задачи, т. е.

$$\iint\limits_{S+S_1} a_n\,ds=0$$

или иначе

$$\iint\limits_{(S)} a_n\,ds+\iint\limits_{(S_1)} a_{n_1}\,ds=0. \tag{A}$$



К задаче 13,10

В этой формуле a_n — проекция вектора $\bar{a}$ на внешнюю нормаль $\bar{n}$ к поверхности S, а a_{n_1} — проекция вектора $\bar{a}$ на внешнюю нормаль $\bar{n}_1$ к поверхности S_1. Внешняя нормаль к поверхности S_1 направлена внутрь (противоположно направлению внешней нормали на поверхности S). Учитывая, что изменение направления нормали на противоположное изменяет знак интеграла, получим

$$\iint\limits_{(S_1)} a_{n_1}\,ds=-\iint\limits_{(S_1)} a_n\,ds. \tag{B}$$

Заменяем в (A) второе слагаемое в левой части равенства его значением из (B):

$$\iint\limits_{(S)} a_n\,ds-\iint\limits_{(S_1)} a_n\,ds=0$$

и окончательно

$$\iint\limits_{(S)} a_n\,ds=\iint\limits_{(S_1)} a_n\,ds,$$

что и требовалось доказать. Решим задачу на применение этого результата.

Задача 13,11. Напряженность $\bar{E}$ поля точечного электрического заряда e на расстоянии r от этого заряда

$$\bar{E} = \frac{e}{r^3}\bar{r}, \tag{A}$$

где $\bar{r}$ — радиус-вектор, проведенный из заряда в рассматриваемую точку поля A.

Определить поток вектора $\bar{E}$ через любую замкнутую поверхность в двух случаях:

1) когда эта поверхность не охватывает заряда e и

2) когда заряд e расположен внутри замкнутой поверхности.

Решение. 1. Для ответа на первый вопрос воспользуемся формулой (13,17). Поток вектора через замкнутую поверхность S

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} a_n\,ds = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\bar{a}\,dv.$$

Будем считать, что заряд e помещен в начале координат, а точка A имеет координаты x, y и z. Тогда радиус-вектор $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, а его модуль $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Поэтому равенство (A) перепишется так:

$$\bar{E} = \frac{e}{r^3}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}),$$

а

$$E_x = \frac{e}{r^3}x; \quad E_y = \frac{e}{r^3}y; \quad E_z = \frac{e}{r^3}z.$$

Найдем теперь $\frac{\partial E_x}{\partial x}$, $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ и $\frac{\partial E_z}{\partial z}$.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = e\frac{r^3 - 3r^2x\cdot\frac{\partial r}{\partial x}}{r^6}.$$

Но $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$.

Поэтому

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = e\frac{r^3 - 3r^2x\cdot\frac{x}{r}}{r^6} = e\frac{r^4 - 3r^2x^2}{r^7} = e\frac{r^2 - 3x^2}{r^5}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = e\frac{r^2 - 3y^2}{r^5}; \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = e\frac{r^2 - 3z^2}{r^5};$$

$$\operatorname{div}\bar{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z},$$

поэтому

$$\operatorname{div}\bar{E}=e\frac{(r^2-3x^2)+(r^2-3y^2)+(r^2-3z^2)}{r^5}=e\frac{3r^2-3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}.$$

Но так как $x^2+y^2+z^2=r^2$, то числитель последней дроби равен нулю и в рассматриваемом случае $\operatorname{div}E=0$.

Поскольку знаменатель последней дроби r^5, то это заключение является верным только тогда, когда $r\neq 0$, т. е. всюду, кроме начала координат. В рассматриваемом случае, когда поверхность S не охватывает заряда e, радиус-вектор r не может быть равен нулю, поэтому поток вектора $\bar{E}$

$$\Pi=\iint\limits_{(S)}E\ ds=\iiint\limits_{(V)}\operatorname{div}\bar{E}\,dv=\iiint\limits_{(V)}0\,dv=0.$$

Заключение. Поток Π вектора E — напряженности электрического поля точечного заряда — через всякую замкнутую поверхность равен нулю, если эта поверхность не охватывает заряда e.

2. Когда заряд e расположен внутри замкнутой поверхности, т. е. когда начало координат находится внутри замкнутой поверхности сделанное выше заключение оказывается неверным, так как в этом случае радиус-вектор r в начале координат равен нулю.

Для ответа на второй вопрос задачи воспользуемся результатами задачи (13,10).

Поскольку в рассматриваемом случае во всех точках объема V, ограниченного поверхностью S, кроме начала координат, $\operatorname{div}\bar{E}=0$, то поток вектора Π не зависит от формы поверхности S, в связи с чем за поверхность S примем сферу радиуса R с центром в начале координат.

Так как внешняя нормаль в любой точке сферы совпадает с направлением радиуса-вектора $\bar{r}$ этой точки, то вектор $\bar{E}$ имеет то же направление, что и внешняя нормаль к сфере, поэтому проекция E_n вектора $\bar{E}$ на внешнюю нормаль равна его модулю.

Так как $\bar{E}=\frac{e}{r^3}\bar{r}=\frac{e}{r^2}\cdot\frac{\bar{r}}{r}$, а $\frac{\bar{r}}{r}$ есть единичный вектор $\bar{r}_0$ радиуса-вектора $\bar{r}$ точки, то $\bar{E}=\frac{e}{r^2}\cdot\bar{r}_0$, а его модуль $E=\frac{e}{r^2}$. Поэтому

$$E_n=\frac{e}{r^2}.$$

Модуль радиуса-вектора точек сферы равен радиусу R сферы, поэтому $r=R$ и тогда $E_n=\frac{e}{R^2}$, а поток вектора $\bar{E}$

$$\Pi=\iint\limits_{(S)}E_n\,ds=\iint\limits_{(S)}\frac{e}{R^2}ds=\frac{e}{R^2}\iint\limits_{(S)}ds=\frac{e}{R^2}\cdot 4\pi R^2=4\pi e,$$

так как $\iint\limits_{(S)}ds$ равен поверхности сферы, т. е. $4\pi R^2$.

Заключение. Если точечный заряд e расположен внутри замкнутой поверхности, то поток вектора $\bar{E}$ — напряженности поля данного заряда — через эту поверхность равен $4\pi e$.

Задача 13,12. Найти поток вектора $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ через положительный октант сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

Решение. Воспользуемся формулой (13,11), в которой надо взять $a_x = x^2$; $a_y = y^2$; $a_z = z^2$. Тогда поток вектора

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} x^2\,dy\,dz + y^2\,dx\,dz + z^2\,dx\,dy, \tag{A}$$

где под S понимается поверхность сферы, расположенная в первом октанте.

Представим интеграл в формуле (A) в виде суммы трех интегралов. Областями интегрирования при вычислении этих интегралов будут проекции поверхности S соответственно на координатные плоскости yOz, xOz и xOy. Это видно из наличия в первом интеграле произведения $dy\,dz$, во втором $dx\,dz$, в третьем $dx\,dy$

$$\Pi = \underbrace{\iint\limits_{S_{yOz}} x^2\,dy\,dz}_{I_1} + \underbrace{\iint\limits_{S_{xOz}} y^2\,dx\,dz}_{I_2} + \underbrace{\iint\limits_{S_{xOy}} z^2\,dx\,dy}_{I_3}.$$

При вычислении интеграла I_1 выразим x^2 через y^2 и z^2. Из уравнения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ следует, что $x^2 = R^2 - (y^2 + z^2)$. Перейдем к полярным координатам, в которых $y^2 + z^2 = \rho^2$; $x^2 = R^2 - \rho^2$, а $dy\,dz$ надо заменить на $\rho\,d\rho\,d\varphi$.

Поэтому

$$I_1 = \iint\limits_{S_{yOz}} x^2\,dy\,dz = \iint\limits_{S_{yOz}} (R^2 - \rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R (R^2 - \rho^2)\,\rho\,d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{R^2\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^R d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^4}{4}\,d\varphi = \frac{R^4}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi R^4}{8}.$$

Вычисляя I_2 и I_3, найдем, что каждый из этих интегралов также равен $\frac{\pi R^4}{8}$, а потому поток

$$\Pi = \frac{\pi R^4}{8} + \frac{\pi R^4}{8} + \frac{\pi R^4}{8} = \frac{3}{8}\pi R^4.$$

Задача 13,13 (для самостоятельного решения). Найти поток вектора $\bar{a} = x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k}$ через поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Указание. Воспользоваться формулой (13,11). Удобно начать с вычисления $\iint\limits_{S_{xOy}} z^3\,dx\,dy$. Из уравнения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ найти $z^2 = R^2 - (x^2 + y^2)$. Перейти к полярным координатам.

Ответ. $П = \frac{3}{2}\pi R^4$.

Задача 13,14. Найти поток вектора $\bar{a} = y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k}$ через часть плоскости $x + y + z = a$, расположенную в первом октанте ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$).

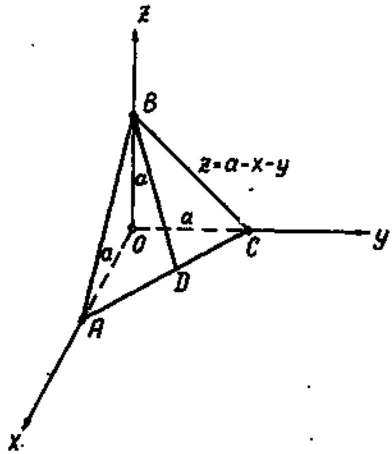
Решение. Воспользуемся формулой (13,8), по которой

$$П = \iint\limits_{(S)} a_n\,ds,$$

и вычислим проекцию a_n вектора $\bar{a}$ на внешнюю нормаль к плоскости $x + y + z = a$ по формуле (13,9)

$$a_n = a_x \cos(\bar{n}, x) + a_y \cos(\bar{n}, y) + a_z \cos(\bar{n}, z).$$

Так как эта нормаль образует с осью Oz острый угол, в формуле для $\cos(\bar{n}, z)$ возьмем знак плюс, а направляющие косинусы нормали найдем по формулам (13,3) и (13,4).



К задаче 13.14

$$\cos(\bar{n}, x) = -\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};\ \cos(\bar{n}, y) = -\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

$$\cos(\bar{n}, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x};\ q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Уравнение плоскости $x + y + z = a$ разрешим относительно z и получим $z = a - x - y$, откуда

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -1;\quad q = \frac{\partial z}{\partial x} = -1;$$

$$\cos(\bar{n}, x) = -\frac{-1}{\sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}} \text{ или } \cos(\bar{n}, x) = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\cos(\bar{n}, y) = \frac{1}{\sqrt{3}};\quad \cos(\bar{n}, z) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Из условия задачи $a_x = y$; $a_y = z$; $a_z = x$. Поток Π вектора $\bar{a}$ будет равен на основании (13,10)

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} \left(y \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + z \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right) ds = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint\limits_{(S)} (x + y + z) ds,$$

где интеграл S распространен на часть плоскости $x + y + z = a$, расположенную в первом октанте. Но в последнем интеграле подынтегральную функцию $x + y + z$ можно заменить из уравнения поверхности на a, так как на поверхности S $x + y + z = a$,

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint\limits_{(S)} a\, ds = \frac{a}{\sqrt{3}} S_{\Delta ABC} \left(\iint\limits_{(S)} ds = S_{\Delta ABC} \right).$$

Треугольник ABC равносторонний ($AB = AC = BC$), значит, каждый его угол равен 60°. Из равнобедренного прямоугольного треугольника AOC следует, что $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. Высота $BD = AC \cdot \sin 60^\circ = AC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, а потому

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

и окончательно

$$\Pi = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{2}.$$

Задача 13,15 (для самостоятельного решения). Определить поток вектора $\bar{a} = y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k}$ из предыдущей задачи через полную поверхность пирамиды, ограниченной плоскостью $x + y + z = a$ и координатными плоскостями (см. чертеж к предыдущей задаче).

Указание. Искомый поток рассмотреть как сумму потоков через грани пирамиды AOB, BOC, AOC и ABC, причем использовать результат предыдущей задачи: через грань ABC поток вектора a $\Pi = \frac{a^3}{2}$. При вычислении потока этого вектора, например через грань AOB, учесть, что на этой грани $\cos(\bar{n}, x) = \cos(\bar{n}, z) = 0$, а $\cos(\bar{n}, y) = -1$ и вычисление потока через эту грань приведет к интегралу $-\iint\limits_{AOB} z\, ds$, в котором элемент ds площади треугольника AOB должен быть заменен на $dx\, dz$. Уравнение прямой AB: $x + z = a$. Отсюда $\Pi_{AOB} = -\frac{a^3}{6}$.

Поток через полную поверхность рассматриваемой пирамиды равен нулю.

Ответ. $\Pi = 0$.

Задача 13,16 (для самостоятельного решения). Найти поток вектора $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ через сферу $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

Указания. Искомый поток вычисляется по формуле (13,11).

1. Удобно перейти к сферическим координатам. Положим

$$\begin{aligned} &x-a=R\cos\varphi\sin\theta;\\ &y-b=R\sin\varphi\sin\theta;\\ &z-c=R\cos\theta;\\ &(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi;\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi). \end{aligned} \tag{A}$$

Проверьте, действительно ли $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

2. При вычислении, например $\iint\limits_{(S)} z^2\,dx\,dy$, рассмотреть его как сумму двух интегралов

$$\iint\limits_{(S)} z^2\,dx\,dy=\iint\limits_{(S_{\text{в}})} z^2\,dx\,dy+\iint\limits_{(S_{\text{н}})} z^2\,dx\,dy,$$

где $S_{\text{в}}$ — верхняя сторона верхней половины сферы, а
$S_{\text{н}}$ — нижняя сторона нижней половины сферы.

Тогда

$$\iint\limits_{(S)} z^2\,dx\,dy=\iint\limits_{S_{\text{в}}} z^2\cos(\bar{n},\ z)_{\text{в}}\,ds+\iint\limits_{(S_{\text{н}})} z^2\cos(\bar{n},\ z)_{\text{н}}\,ds,$$

где $\cos(\bar{n},\ z)_{\text{в}}$ и $\cos(\bar{n},\ z)_{\text{н}}$ — косинусы угла между внешней нормалью и осью Oz соответственно на верхней стороне верхней половины и на нижней стороне нижней половины сферы.

3. Разрешить уравнение поверхности относительно $z-c$

$$\begin{aligned} z-c&=\pm\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2};\\ z&=c\pm\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}, \end{aligned} \tag{B}$$

где знак плюс надо взять для верхней половины сферы, а знак минус — для нижней.

На верхней стороне верхней половины сферы $\cos(\bar{n},\ z)>0$

$$\cos(\bar{n},\ z)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \tag{C}$$

а на нижней стороне нижней половины сферы $\cos(\bar{n},\ z)<0$

$$\cos(\bar{n},\ z)=-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}. \tag{D}$$

Вычисляя $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ из уравнений (B) и подставляя в (C) и (D), получим в двух случаях для $\cos(\bar{n},\ z)$ одно и то же выражение $\cos(\bar{n},\ z)=$

$= \frac{z-c}{R}$. Тогда, если учесть, что в сферических координатах элемент поверхности

$$ds = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

(см. В. Смирнов. Курс высшей математики, т. II, стр. 190),

$$\iint\limits_{(S_в)} z^2 \cos(\bar{n}, z)_в \, ds + \iint\limits_{(S_н)} z^2 \cos(\bar{n}\ z)_н \, ds =$$

$$= \iint\limits_{(S)} z^2 \cdot \frac{z-c}{R} \cdot R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = R \iint\limits_{(S)} z^2 (z-c) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Так как $\cos(\bar{n}, z)$ имеет одно и то же выражение на поверхностях $(S_в)$ и $(S_н)$, мы от интегралов по этим поверхностям перешли к интегралу по всей поверхности сферы. Вычислить последний интеграл несложно. В нем на основании равенства (A) следует взять

$$z - c = R\cos\theta,$$

пределы интегрирования по θ будут 0 и π, а по φ они равны 0 и 2π.

После вычислений получим

$$\iint\limits_{(S)} z^2 \, dx \, dy = \frac{8}{3} \pi c R^3.$$

Аналогично вычисляются и два других интеграла:

$$\iint\limits_{(S)} x^2 \, dy \, dz \ \text{ и } \ \iint\limits_{(S)} y^2 \, dx \, dz.$$

Ответ. $\Pi = \frac{8}{3} \pi R^3 (a + b + c)$.

Задача 13,17 (для самостоятельного решения). Найти поток вектора $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ через верхнюю сторону верхней половины сферы

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Ответ. $\Pi = 2\pi R^2 \left(\frac{c^2}{2} + \frac{2}{3} cR + \frac{R^2}{4}\right)$.

Задача 13,18 (для самостоятельного решения). Вычислить поток вектора

$$\bar{a} = (x+y)\bar{i} + (y-x)\bar{j} + z\bar{k}$$

через поверхность шара единичного радиуса с центром в начале координат.

Указание. Вычислить дивергенцию вектора $\bar{a}$. Окажется, что

$$\operatorname{div} \bar{a} = 3,$$

и применить формулу Остроградского.

Ответ. $\Pi = 4\pi$.

Содержание. Свойства дивергенции. Упражнения, связанные с формулами Остроградского и Стокса.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Формула Стокса. Эта формула связывает криволинейный интеграл по замкнутому контуру L с интегралом по поверхности, ограниченной данным контуром. Она записывается так:

$$\oint_L a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz =$$
$$= \iint_{(S)} \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos(n,\ x) + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos(n,\ y) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos(n,\ z)\right] ds. \qquad (14{,}1)$$

Здесь L — замкнутый контур, ограничивающий поверхность S. Направление нормали к поверхности S выбирается так: для наблюдателя, стоящего на поверхности и смотрящего на нее с конца нормали, обход контура L в правой системе координат должен происходить против движения часовой стрелки.

Формула (14,1) на основании формул (12,7) может быть записана так:

$$\oint_L a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz = \iint_{(S)} [\mathrm{rot}_x\,\bar a \cos(n,\ x) +$$
$$+ \mathrm{rot}_y\,\bar a \cos(n,\ y) + \mathrm{rot}_z\,\bar a \cos(n,\ z)]\,ds. \qquad (14{,}2)$$

2. Формула Стокса в векторной форме. Учитывая, что выражение в квадратных скобках под интегралом в (14,2) есть проекция вектора $\mathrm{rot}\,\bar a$ на нормаль к поверхности, т. е. $(\mathrm{rot}\,\bar a)_n$, формула (14,2) в векторной форме запишется так:

$$\oint_L \bar a \cdot \overline{dl} = \iint_{(S)} (\mathrm{rot}\,\bar a)_n\,ds, \qquad (14{,}3)$$

где $\overline{dl}$ — элемент дуги кривой L, рассматриваемый как малый вектор, проекции которого на координатные оси равны dx, dy и dz.

Из формулы Стокса (14,2) заключаем, что *циркуляция произвольного вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора* *этого вектора через любую поверхность, опирающуюся на этот контур* (направление обхода контура L и направление нормали к поверхности S должны быть согласованы одно с другим).

Свойства дивергенции

Задача 14,1. Доказать что

$$\operatorname{div}(\bar{a}+\bar{b}) = \operatorname{div}\bar{a} + \operatorname{div}\bar{b},$$

где

$$\bar{a} = \bar{a}(x,\ y,\ z),\quad \bar{b} = \bar{b}(x,\ y,\ z).$$

Решение. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определяются равенствами

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k};$$
$$\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k};$$
$$(\bar{a}+\bar{b})_x = a_x + b_x;\quad (\bar{a}+\bar{b})_y = a_y + b_y;$$
$$(\bar{a}+\bar{b})_z = a_z + b_z.$$

Согласно формуле (13,13)

$$\operatorname{div}\bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Поэтому

$$\operatorname{div}(\bar{a}+\bar{b}) = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{a}+\bar{b})_x + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{a}+\bar{b})_y + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{a}+\bar{b})_z =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(a_x+b_x) + \frac{\partial}{\partial y}(a_y+b_y) + \frac{\partial}{\partial z}(a_z+b_z) =$$
$$= \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z}\right).$$

Выражение, стоящее в первой скобке, есть $\operatorname{div} a$, а выражение, стоящее во второй скобке, есть $\operatorname{div}\bar{b}$.

Итак,

$$\operatorname{div}(\bar{a}+\bar{b}) = \operatorname{div}\bar{a} + \operatorname{div}\bar{b}.$$

Задача 14,2 (для самостоятельного решения). Доказать, что $\operatorname{div}(U\bar{a}) = \bar{a}\cdot\operatorname{grad}U$, где $\bar{a}$ — постоянный вектор, $U = U(x,\ y,\ z)$, а $\bar{a}\cdot\operatorname{grad}U$ — скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\operatorname{grad}U$.

Задача 14,3. Доказать, что, если $\bar{a} = \bar{a}(x,\ y,\ z)$, а функция $U = U(x,\ y,\ z)$, то

$$\operatorname{div}(U\bar{a}) = U\operatorname{div}\bar{a} + \bar{a}\cdot\operatorname{grad}U\ *$$

* В отличие от предыдущей задачи здесь $\bar{a}$ — переменный вектор.

Решение. Вектор $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$;

$$U\bar{a} = (Ua_x)\bar{i} + (Ua_y)\bar{j} + (Ua_z)\bar{k};$$

$$\operatorname{div}(U\bar{a}) = \frac{\partial}{\partial x}(Ua_x) + \frac{\partial}{\partial y}(Ua_y) + \frac{\partial}{\partial z}(Ua_z) =$$

$$= \left(a_x\frac{\partial U}{\partial x} + U\frac{\partial a_x}{\partial x}\right) + \left(a_y\frac{\partial U}{\partial y} + U\frac{\partial a_y}{\partial y}\right) +$$

$$+ \left(a_z\frac{\partial U}{\partial z} + U\frac{\partial a_z}{\partial z}\right) = \underbrace{\left(a_x\frac{\partial U}{\partial x} + a_y\frac{\partial U}{\partial y} + a_z\frac{\partial U}{\partial z}\right)}_{\bar{a}\cdot\operatorname{grad}U} +$$

$$+ U\underbrace{\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)}_{\operatorname{div}\bar{a}} = U\operatorname{div}\bar{a} + \bar{a}\operatorname{grad}U.$$

(Сумма, стоящая в первой скобке, есть $\bar{a}\cdot\operatorname{grad}U$, так как проекции вектора $\operatorname{grad}U$ на координатные оси Ox, Oy и Oz равны соответственно $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ и $\frac{\partial U}{\partial z}$, а проекции вектора $\bar{a}$ на те же оси соответственно равны a_x, a_y и a_z).

Задача 14,4. Найти $\operatorname{div}(\operatorname{grad}U)$, где $U = U(x, y, z)$.

Решение. $\operatorname{div}(\operatorname{grad}U) =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{grad}U)_x + \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{grad}U)_y + \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{grad}U_z) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} =$$

$= \Delta U$ (Δ — оператор Лапласа).

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}U = \Delta U.$$

Задача 14,5 (для самостоятельного решения). Доказать, что если $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то

$$\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)] = \frac{d^2f}{dr^2} + \frac{df}{dr}\cdot\frac{2}{r}.$$

Указание. Учесть, что

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(r)] = \frac{df}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{df}{dr}\cdot\frac{x}{r}.$$

Задачи на формулу Остроградского

Задача 14,6. Применяя формулу Остроградского, преобразовать поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{(S)} x^3\,dy\,dz + y^3\,dx\,dz + z^3\,dx\,dy,$$

если S — гладкая поверхность, ограничивающая объем V.

Решение. На основании формулы (13,8), полагая в ней $P = x^3$; $Q = y^3$; $R = z^3$, получаем

$$\iint\limits_{(S)} x^3\,dy\,dz + y^3\,dx\,dz + z^3\,dx\,dy =$$

$$\iiint\limits_{(V)} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right] dv = \iiint\limits_{(V)} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2)\,dv =$$

$$= 3\iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2)\,dv.$$

Задача 14,7. Применяя формулу Остроградского, преобразовать

$$I = \iint\limits_{(S)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\,ds,$$

где S — гладкая поверхность, ограничивающая объем V, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

Решение. Полагая в формуле (13,7) $P = Q = R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, получаем

$$I = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \frac{\partial}{\partial z}\sqrt{x^2+y^2+g^2}\right) dv =$$

$$= \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) dv =$$

$$= \iiint\limits_{(V)} \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dv.$$

Задача 14,8 (для самостоятельного решения). Преобразовать по формуле Остроградского

$$\iint\limits_{(S)} \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,ds,$$

сохраняя обозначения предыдущей задачи.

Ответ. $2\iiint\limits_{(V)} \frac{dv}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Задача 14,9 (для самостоятельного решения). Доказать, что

$$\iint\limits_{(S)} x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$$

равен утроенному объему тела, ограниченного поверхностью S.

Задача 14.10 (для самостоятельного решения). Применяя формулу Остроградского, преобразовать поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{(S)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)ds,$$

где S — гладкая поверхность, ограничивающая объем V, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

Ответ. $\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dv$

или в другой записи

$$\iiint\limits_{(V)}\Delta u\cdot dv,$$

где $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ есть лапласиан функции u.

Задача 14,11 (для самостоятельного решения). Доказать, что если S — замкнутая простая поверхность, l — любое постоянное направление, а $\bar{n}$ внешняя нормаль к поверхности S, то

$$\iint\limits_{(S)}\cos(\bar{n},\ \bar{l})\,ds=0.$$

Указание. Заменить $\cos(\bar{n},\ \bar{l})$ по формуле

$$\cos(\bar{n},\ \bar{l})=\cos(\bar{n},\ x)\cos(\bar{l},\ x)+\cos(\bar{n},\ y)\cos(\bar{l},\ y)+$$
$$+\cos(\bar{n},\ z)\cos(\bar{l},\ z).$$

Задача 14,12. С помощью формулы Остроградского доказать, что поток вихря вектора $\bar{a}$ через замкнутую поверхность равен нулю.

Решение. Вихрь вектора $\bar{a}$ определяется формулой (12,6). Поток вектора $\operatorname{rot}\bar{a}$ через замкнутую поверхность S вычисляется по формуле (13,8)

$$\Pi=\iint\limits_{(S)}(\operatorname{rot}a)_n\,ds.$$

Нам следует найти проекцию вектора $\operatorname{rot}\bar{a}$ на нормаль к поверхности. Пользуясь формулами (12,7) и (13,9), определим

$$(\operatorname{rot}\bar{a})_n=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos(\bar{n},\ x)+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos(\bar{n},\ y)+$$
$$+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos(\bar{n},\ z),$$

поэтому искомый поток

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos(\bar{n},\ x) + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos(\bar{n},\ y) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos(\bar{n},\ z)\right] ds.$$

Теперь применим формулу Остроградского (13,15), полагая в ней

$$P = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial y};\ Q = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x};\ R = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y};$$

$$\Pi = \iiint\limits_{(V)} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\right] dv =$$
$$= \iiint\limits_{(V)} \left[\left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial y\,\partial x} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial z\,\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial z\,\partial y} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial x\,\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y\,\partial z}\right)\right] dv.$$

Легко убедиться, что выражение, стоящее в квадратной скобке, равно нулю:

$$\Pi = 0.$$

Задача 14,13. С помощью формулы Остроградского вычислить

$$I = \iint\limits_{(S)} x^3\,dy\,dz + y^3\,dx\,dz + z^3\,dx\,dy,$$

где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Решение. В задаче 14,6 этот интеграл был преобразован к виду

$$3\iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2)\,dv.$$

Наличие под знаком интеграла суммы квадратов координат указывает на целесообразность перехода к сферическим координатам, в которых

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2;\quad dv = \rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi;$$
$$I = 3\iiint\limits_{(V)} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = 3\iiint\limits_{(V)} \rho^4 \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi,$$

где V — объем шара, ограниченного поверхностью S.

$$I = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^{R} \rho^4\,d\rho = 3 \cdot \frac{R^5}{5} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{12}{5}\pi R^5,$$

так как

$$\int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{R^5}{5}; \quad \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta = -\cos\theta \Big|_0^\pi = 2; \quad \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

Задача 14,14 (для самостоятельного решения). С помощью формулы Остроградского вычислить

$$\iint_{(S)} x^3\, dy\, dz + y^3\, dx\, dz + z^3\, dx\, dy,$$

где S — внешняя сторона куба $0 < x \leqslant a;\ 0 \leqslant y \leqslant a;\ 0 < z < a$.

Ответ. $\frac{3}{2} a^4$.

Указание. При вычислении тройного интеграла $\iiint_{(V)} (x + y + z)\, dv$ имеет смысл представить его в виде суммы трех интегралов

$$\iiint_{(V)} x\, dv + \iiint_{(V)} y\, dv + \iiint_{(V)} z\, dv,$$

причем каждый из них окажется равным $\frac{a^4}{2}$.

Например, $\iiint_{(V)} x\, dv = \int_0^a x\, dx \iint_{S_{yOz}} dy\, dz$, а $\iint_{(S_{yOz})} dy\, dz = a^2$.

S_{yOz} — проекция поверхности S на плоскость yOz.

Задача 14,15 (для самостоятельного решения). Пользуясь формулой Остроградского, вычислить

$$\iint_{(S)} x \cos(\bar{n},\ x)\, ds,$$

где S — поверхность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Ответ. $\frac{4}{3}\pi abc$.

Задача 14,16. Вычислить по формуле Остроградского

$$\iint_{(S)} [y^2 z \cos(\bar{n},\ z) - yz^2 \cos(\bar{n},\ y)]\, ds,$$

где S — поверхность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение. Полагаем в формуле (13,15) $P = 0$; $Q = -yz^2$; $R = y^2 z$; $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial Q}{\partial y} = -z^2$; $\frac{\partial R}{\partial z} = y^2$, тогда

$$\iint_{(S)} [y^2 z \cos(\bar{n},\ z) - yz^2 \cos(\bar{n},\ y)]\, ds = \iiint_{(V)} (y^2 - z^2)\, dv,$$

где V — объем эллипсоида.

Тройной интеграл вычислим по формуле (3,4б), которую мы уже применяли на третьем практическом занятии в четвертой части этой книги.

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dv = \int\limits_{z_0}^{z_1} dz \iint\limits_{E_{xOy}} f(x, y, z)\,dx\,dy, \qquad (14{,}4)$$

где E_{xOy} — проекция на плоскость xOy фигуры, получающейся в сечении объема V, плоскостью, параллельной плоскости xOy, которая соответствует фиксированному значению z. При этом $z_0 < z < z_1$, а $z = z_0$ и $z = z_1$ — уравнения плоскостей, между которыми содержится объем V тела, причем фигура, получающаяся в сечении, проектируется без искажения. Применим эту формулу для вычисления интересующего нас тройного интеграла. Представим его в таком виде:

$$\iiint\limits_{(V)} (y^2 - z^2)\,dv = \iiint\limits_{(V)} y^2\,dx\,dy\,dz - \iiint\limits_{(V)} z^2\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int\limits_{-b}^{b} y^2\,dy \iint\limits_{E_{xOz}} dx\,dz - \int\limits_{-c}^{c} z^2\,dz \iint\limits_{E_{xOy}} dx\,dy.$$

Здесь: 1) E_{xOz} — проекция на плоскость xOz сечения эллипсоида плоскостью, параллельной плоскости xOz, при фиксированном значении y; $\iint\limits_{E_{xOz}} dx\,dz$ равен площади этой проекции. Уравнение контура проекции получим из уравнения поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, считая, что в этом уравнении y — величина фиксированная.

Уравнение этого контура будет иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

или

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)} = 1.$$

Полуосями этого эллипса будут

$$a_1 = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}; \quad b_1 = c\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}},$$

а его площадь равна $\pi a_1 b_1$, т. е.

$$E_{xOz} = \pi ac\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

и тогда в правой части (A) интеграл

$$\iint\limits_{E_{xOz}} dx\,dz = \pi ac\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right),$$

$$\int\limits_{-b}^{b} y^2\,dy \iint\limits_{E_{xOz}} dx\,dz = \int\limits_{-b}^{b} y^2\cdot\pi ac\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy = \frac{4}{15}\pi acb^3.$$

2. Точно так же вычислим в правой части (A) интеграл $\iint\limits_{E_{xOy}} dx\,dy$, учитывая, что E_{xOy} есть проекция на плоскость xOy сечения эллипсоида плоскостью, параллельной плоскости xOy.

Уравнение контура этого сечения получим из уравнения поверхности эллипсоида, считая, что z имеет в этом уравнении фиксированное значение.

Уравнение контура E_{xOy} будет

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)} = 1,$$

а площадь эллипса

$$E_{xOy} = \iint\limits_{E_{xOy}} dx\,dy = \pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right).$$

В правой части (A) второй интеграл

$$\int\limits_{-c}^{c} z^2\,dz \iint\limits_{E_{xOy}} dx\,dy = \frac{4}{15}\pi abc^3,$$

поэтому окончательно искомый интеграл

$$\iiint\limits_{(V)} (y^2-z^2)\,dv = \frac{4}{15}\pi acb^3 - \frac{4}{15}\pi abc^3 = \frac{4}{15}\pi abc\,(b^2-c^2).$$

Задача 14,17. Вычислить интеграл Гаусса

$$G = \iint\limits_{(S)} \frac{\cos(\bar{n}, \bar{r})}{r^2}\,ds,$$

где S — простая замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая объем x; $\bar{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S в ее точке $A(x, y, z)$; r — радиус-вектор, соединяющий фиксированную точку $B(a, b, c)$ с переменной точкой $A(x, y, z)$ поверхности.

Рассмотреть два случая:

1) когда поверхность S не окружает точку B и не проходит через нее;

2) когда поверхность S окружает точку B.

Решение. Косинус угла между нормалью $\bar{n}$ и радиусом-вектором $\bar{r}$ определяется по формуле

$$\cos(\bar{n}, \bar{r}) = \cos(\bar{n}, x)\cos(\bar{r}, x) + \cos(\bar{n}, y)\cos(\bar{r}, y) + \cos(\bar{n}, z)\cos(\bar{r}, z) \tag{A}$$

(обозначения не требуют пояснений).

Модуль радиуса-вектора $\bar{r}$

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}. \tag{B}$$

Косинусы углов между радиусом-вектором и координатными осями равны

$$\cos(\bar{r}, x) = \frac{x-a}{r}; \ \cos(\bar{r}, y) = \frac{y-b}{r}; \ \cos(r, z) = \frac{z-c}{r}. \tag{C}$$

Подставляя эти значения в формулу (A), имеем

$$\cos(\bar{n}, r) = \frac{x-a}{r}\cos(\bar{n}, x) + \frac{y-b}{r}\cos(\bar{n}, y) + \frac{z-c}{r}\cos(\bar{n}, z).$$

Теперь вычисляемый интеграл G перепишется так:

$$G = \iint\limits_{(S)} \left[\frac{x-a}{r^3}\cos(\bar{n}, x) + \frac{y-b}{r^3}\cos(\bar{n}, y) + \frac{z-c}{r^3}\cos(\bar{n}, z)\right] ds. \tag{D}$$

Для вычисления этого интеграла применим формулу Остроградского (13,7), в которой надо считать, что $P = \frac{x-a}{r^3}$; $Q = \frac{y-b}{r^3}$; $R = \frac{z-c}{r^3}$.

Определим $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ и $\frac{\partial R}{\partial z}$.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{r^3 - (x-a)\cdot 3r^2\frac{\partial r}{\partial x}}{r^6}.$$

Но из формулы (B) следует, что

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = \frac{x-a}{r}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{r^3 - 3\cdot\frac{(x-a)^2}{r}\cdot r^2}{r^6} = \frac{r^4 - 3(x-a)^2r^2}{r^7};$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{r^2 - 3(x-a)^2}{r^5}$$

и аналогично

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{r^2-3(y-b)^2}{r^5};\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{r^2-3(z-c)^2}{r^5};$$

$$G=\iiint\limits_{(V)}\left[\frac{r^2-3(x-a)^2}{r^5}+\frac{r^2-3(y-b)^2}{r^5}+\frac{r^2-3(z-c)^2}{r^5}\right]dv \qquad \text{(E)}$$

или

$$G=\iiint\limits_{(V)}\frac{3r^2-3[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]}{r^5}\,dv.$$

Так как $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$, то

$$G=\iiint\limits_{(V)}\frac{3r^2-3r^2}{r^5}\,dv=0.$$

При этом существенно следующее: применять формулу Остроградского надо так, чтобы была соблюдена непрерывность функций P, Q и R и их производных $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ и $\frac{\partial R}{\partial z}$. Их непрерывность будет соблюдена, когда $r\neq 0$, т. е. когда точка $B(a, b, c)$ находится вне поверхности S.

Итак, отвечая на первый вопрос задачи, можно сказать, что когда фиксированная точка B находится вне поверхности S, интеграл Гаусса $G=0$.

Теперь рассмотрим случай, когда поверхность S окружает точку $B(a, b, c)$. Преобразуя по формуле Остроградского (13,14) двойной интеграл по поверхности S к тройному интегралу, распространенному на объем V, ограниченный этой поверхностью, надо иметь в виду, что $\bar{r}$ — радиус-вектор, соединяющий точку $B(a, b, c)$ с любой точкой $A(x, y, z)$ уже не поверхности S, а области (V). Поэтому в самой точке B он равен нулю, а функции P, Q и R и их частные производные, в которых r находится в знаменателе, перестают быть непрерывными в этой единственной точке области V (во всех остальных точках этой области они непрерывны), и формулу Остроградского для преобразования интеграла Гаусса применить во всем объеме V нельзя (интеграл Гаусса в данном случае становится несобственным).

Изолируем точку B и тем самым получим возможность во всем оставшемся объеме применить к интегралу Гаусса формулу Остроградского.

Образуем вокруг точки $B(a, b, c)$ сферу S_ρ такого радиуса ρ, чтобы она целиком содержалась внутри объема X. Тогда для объема V_1, заключенного между поверхностью S и поверхностью сферы S_ρ, формула Остроградского применима и поэтому по формулам (D) и (E) получаем

$$\iint\limits_{(S)}\left[\frac{x-a}{r^3}\cos(\bar n, x)+\frac{y-b}{r^3}\cos(\bar n, y)+\frac{z-c}{r^3}\cos(\bar n, z)\right]ds-$$

$$-\iint\limits_{(S_\rho)}\frac{x-a}{r^3}\cos(\bar n, x)+\frac{y-b}{r^3}\cos(\bar n, y)+\frac{z-c}{r^3}\cos(\bar n, z)\Big]ds=$$

$$=\iiint\limits_{(V_1)}\left[\frac{r^2-3(x-a)^2}{r^5}+\frac{r^2-3(y-b)^2}{r^5}+\frac{r^2-3(z-c)^2}{r^5}\right]dv=0.$$

Отсюда вычисляемый интеграл

$$G=\iint\limits_{(S)}\frac{\cos(\bar n, \bar r)}{r^2}\,ds=\iint\limits_{(S_\rho)}\left[\frac{x-a}{r^3}\cos(\bar n, x)+\frac{y-b}{r^3}\cos(\bar n, y)+\right.$$

$$\left.+\frac{z-c}{r^3}\cos(\bar n, z)\right]dv.$$

На сфере S_ρ рассматривается внешняя нормаль.

На поверхности сферы S_ρ $r=\rho$, нормаль к сфере $\bar n$ направлена по ее радиусу, а потому направляющие косинусы $\cos(\bar n, x)$, $\cos(\bar n, y)$, и $\cos(\bar n, z)$ нормали $\bar n$ равны направляющим косинусам радиуса-вектора $\bar\rho$, которые получаются из формул (C) заменой в них r на ρ.

Таким образом, последнее равенство перепишется так:

$$G=\iint\limits_{(S_\rho)}\left(\frac{x-a}{\rho^3}\cdot\frac{x-a}{\rho}+\frac{y-b}{\rho^3}\cdot\frac{y-b}{\rho}+\frac{z-c}{\rho^3}\cdot\frac{z-c}{\rho}\right)ds=$$

$$=\iint\limits_{(S_\rho)}\frac{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}{\rho^4}\,ds=\iint\limits_{(S_\rho)}\frac{\rho^2}{\rho^4}\,ds=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{(S_\rho)}ds=\frac{1}{\rho^2}\cdot 4\pi\rho^2=4\pi.$$

Здесь величина $\frac{1}{\rho^2}$, как постоянная, вынесена за знак двойного интеграла, а двойной интеграл $\iint\limits_{(S_\rho)}ds$ по поверхности (S_ρ) равен площади этой поверхности, т. е. $4\pi\rho^2$.

Итак, на второй вопрос задачи следует ответить так: если поверхность S окружает фиксированную точку $B(a, b, c)$, то интеграл Гаусса $G=4\pi$.

Укажем для справки, что, когда поверхность S проходит через точку B, то интеграл Гаусса $G=2\pi$. Доказывать этого мы не будем.

Задача 14,18. Доказать, что вихрь суммы векторных полей равен сумме вихрей этих полей

$$\operatorname{rot}(\bar a+\bar b)=\operatorname{rot}\bar a+\operatorname{rot}\bar b. \tag{14,5}$$

Решение. Из определения вихря вектора следует

$$\operatorname{rot}(\bar a+\bar b)=\left[\frac{\partial(a_z+b_z)}{\partial y}-\frac{\partial(a_y+b_y)}{\partial z}\right]\bar i+$$

$$+\left[\frac{\partial(a_x+b_x)}{\partial z}-\frac{\partial(a_z+b_z)}{\partial x}\right]\bar j+\left[\frac{\partial(a_y+b_y)}{\partial x}-\frac{\partial(a_x+b_x)}{\partial y}\right]\bar k=$$

$$=\left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}+\frac{\partial b_z}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial a_y}{\partial z}+\frac{\partial b_y}{\partial z}\right)\right]\bar i+\left[\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}+\frac{\partial b_x}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial a_z}{\partial x}+\frac{\partial b_z}{\partial x}\right)\right]\bar j+$$

$$+\left[\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}+\frac{\partial b_y}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}+\frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\right]\bar k=$$

$$=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\bar i+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\bar j+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\bar k+$$

$$+\left(\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial z}\right)\bar i+\left(\frac{\partial b_x}{\partial z}-\frac{\partial b_z}{\partial x}\right)\bar j+\left(\frac{\partial b_y}{\partial x}-\frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\bar k.$$

Первые три слагаемые есть $\operatorname{rot}\bar a$, а вторые три — $\operatorname{rot}\bar b$. Этим доказано требуемое:

$$\operatorname{rot}(\bar a+\bar b)=\operatorname{rot}\bar a+\operatorname{rot}\bar b.$$

Задача 14,19. *(вычисление вихря произведения скалярной функции на вектор).* Доказать, что

$$\operatorname{rot}(u\bar a)=\operatorname{grad}u\times\bar a+u\operatorname{rot}\bar a, \tag{14,6}$$

где u — скалярная функция от x, y, z.

Решение. Докажем, что проекции векторов, стоящих в левой и правой частях доказываемого равенства, равны между собой

$$(\operatorname{rot}u\bar a)_x=\frac{\partial}{\partial y}(ua_z)-\frac{\partial}{\partial z}(ua_y)=\frac{\partial u}{\partial y}a_z+u\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}a_y-u\frac{\partial a_y}{\partial z}=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial y}a_z-\frac{\partial u}{\partial z}a_y+u\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right). \tag{A}$$

Векторное произведение векторов $\operatorname{grad}u$ и $\bar a$ равно:

$$\operatorname{grad}u\times\bar a=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$(\operatorname{grad}u\times\bar a)_x=\frac{\partial u}{\partial y}a_z-\frac{\partial u}{\partial z}a_y.$$

В равенстве (A) первые два слагаемых есть $(\operatorname{grad} u \otimes a)_x$, а выражение в круглых скобках есть проекция $\operatorname{rot}\bar{a}$ на ось Ox. Таким образом,

$$(\operatorname{rot} u\bar{a})_x = (\operatorname{grad} u \times \bar{a})_x + u(\operatorname{rot}\bar{a})_x. \tag{A}$$

Аналогично

$$(\operatorname{rot} u\bar{a})_y = (\operatorname{grad} u \times \bar{a})_y + u(\operatorname{rot}\bar{a})_y \tag{B}$$

$$(\operatorname{rot} u\bar{a})_z = (\operatorname{grad} u \times \bar{a})_z + u(\operatorname{rot}\bar{a})_z. \tag{C}$$

Умножая (A), (B) и (C) соответственно на $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ и почленно складывая, получим требуемую формулу.

Задача 14,20 *(градиент скалярного произведения)*. Доказать, что

$$\operatorname{grad}(\bar{a}\cdot\bar{b}) = \bar{a}\times\operatorname{rot}\bar{b} + \bar{b}\times\operatorname{rot}\bar{a} + \frac{d\bar{a}}{d\bar{b}} + \frac{d\bar{b}}{d\bar{a}}. \tag{14,7}$$

Решение. В правой части доказываемого равенства последние два слагаемых являются производными одного вектора по другому вектору. Начнем с определения того, что называется производной вектора по другому вектору.

Определение. Производной вектора $\bar{a}$ по вектору $\bar{b}$ называется вектор

$$\frac{d\bar{a}}{d\bar{b}} = \frac{\partial\bar{a}}{\partial x}b_x + \frac{\partial\bar{a}}{\partial y}b_y + \frac{\partial\bar{a}}{\partial z}b_z.$$

Найдем проекции этого вектора на координатные оси:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\bar{a}}{\partial x} &= \frac{\partial a_x}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial a_y}{\partial x}\bar{j} + \frac{\partial a_z}{\partial x}\bar{k}\ \Big|\ b_x;\\
\frac{\partial\bar{a}}{\partial y} &= \frac{\partial a_x}{\partial y}\bar{i} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial a_z}{\partial y}\bar{k}\ \Big|\ b_y;\\
\frac{\partial\bar{a}}{\partial z} &= \frac{\partial a_x}{\partial z}\bar{i} + \frac{\partial a_y}{\partial z}\bar{j} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\bar{k}\ \Big|\ b_z.
\end{aligned}$$

Умножая каждое из этих равенств соответственно на b_x, b_y и b_z и почленно складывая, найдем, что вектор

$$\frac{d\bar{a}}{d\bar{b}} = \frac{\partial\bar{a}}{\partial x}b_x + \frac{\partial\bar{a}}{\partial y}b_y + \frac{\partial\bar{a}}{\partial z}b_z = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}b_x + \frac{\partial a_x}{\partial y}b_y + \frac{\partial a_x}{\partial z}b_z\right)\bar{i} +$$
$$+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}b_x + \frac{\partial a_y}{\partial y}b_y + \frac{\partial a_y}{\partial z}b_z\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial a_z}{\partial x}b_x + \frac{\partial a_z}{\partial y}b_y + \frac{\partial a_z}{\partial z}b_z\right)\bar{k}.$$

Отсюда следует, что проекции вектора $\frac{d\bar{a}}{d\bar{b}}$ на координатные оси равны:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d\bar{a}}{d\bar{b}}\right)_x &= \frac{\partial a_x}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_x}{\partial y} b_y + \frac{\partial a_x}{\partial z} b_z \\ \left(\frac{d\bar{a}}{d\bar{b}}\right)_y &= \frac{\partial a_y}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_y}{\partial y} b_y + \frac{\partial a_y}{\partial z} b_z \\ \left(\frac{d\bar{a}}{d\bar{b}}\right)_z &= \frac{\partial a_z}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_z}{\partial y} b_y + \frac{\partial a_z}{\partial z} b_z\end{aligned}\right\}. \tag{14,8}$$

Спроектируем левую и правую части доказываемой формулы (14,7) на координатные оси (очевидно, что каждая из частей этой формулы есть вектор). Учитывая, что

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

получим

$$\operatorname{grad}(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \frac{\partial}{\partial x}(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)\bar{i} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)\bar{k}.$$

Продифференцировав первое слагаемое правой части, найдем, что проекция $\operatorname{grad}(\bar{a} \cdot \bar{b})$ на ось Ox равна

$$[\operatorname{grad}(\bar{a} \cdot \bar{b})]_x = \frac{\partial a_x}{\partial x} b_x + a_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial x} b_y + a_y \frac{\partial b_y}{\partial x} + \frac{\partial a_z}{\partial x} b_z + a_z \frac{\partial b_z}{\partial x},$$

или в более удобной записи,

$$[\operatorname{grad}(\bar{a} \cdot \bar{b})]_x = \frac{\partial a_x}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_y}{\partial x} b_y + \frac{\partial a_z}{\partial x} b_z + \frac{\partial b_x}{\partial x} a_x + \frac{\partial b_y}{\partial x} a_y + \frac{\partial b_z}{\partial x} b_z. \tag{14,9}$$

Теперь спроектируем на ось Ox вектор, стоящий в правой части формулы (14,7).

$$\begin{aligned}(\bar{a} \times \operatorname{rot}\bar{b})_x &= a_y(\operatorname{rot}\bar{b})_z - a_z(\operatorname{rot}\bar{b})_y = \\ &= a_y\left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}\right) - a_z\left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}\right) = \\ &= \frac{\partial b_y}{\partial x} a_y - \frac{\partial b_x}{\partial y} a_y - \frac{\partial b_x}{\partial z} a_z + \frac{\partial b_z}{\partial x} a_z.\end{aligned} \tag{A}$$

Точно так же, меняя местами a и b, получаем:

$$(\bar{b} \times \operatorname{rot}\bar{a})_x = \frac{\partial a_y}{\partial x} b_y - \frac{\partial a_x}{\partial y} b_y - \frac{\partial a_x}{\partial z} b_z + \frac{\partial a_z}{\partial x} b_z; \tag{B}$$

$$\left(\frac{d\bar{a}}{d\bar{b}}\right)_x = \frac{\partial a_x}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_x}{\partial y} b_y + \frac{\partial a_x}{\partial z} b_z; \tag{C}$$

$$\left(\frac{d\bar{b}}{d\bar{a}}\right)_x = \frac{\partial b_x}{\partial x} a_x + \frac{\partial b_x}{\partial y} a_y + \frac{\partial b_x}{\partial z} a_z. \tag{D}$$

Легко заметить, что от почленного сложения (A), (B), (C) и (D) получим $[\operatorname{grad}(\bar{a}\cdot\bar{b})]_x$. Точно так же мы придем к заключению, что и проекции левой и правой части (14,7) на оси Oy и Oz равны между собой. Но если проекции двух векторов соответственно равны, то и сами векторы равны. Значит, требуемое доказано.

Задача 14,21 *(дивергенция векторного произведения)*. Доказать, что

$$\operatorname{div}(\bar{a}\times\bar{b})=\bar{b}\operatorname{rot}\bar{a}-\bar{a}\operatorname{rot}\bar{b}$$

(вектор $\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$; вектор $\bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}$, причем проекции векторов есть функции x, y и z).

Решение. Расписываем дивергенцию вектора по формуле (13,6):

$$\operatorname{div}(\bar{a}\times\bar{b})=\frac{\partial}{\partial x}(\bar{a}\times\bar{b})_x+\frac{\partial}{\partial y}(\bar{a}\times\bar{b})_y+\frac{\partial}{\partial z}(\bar{a}\times\bar{b})_z;$$

$$\operatorname{div}(\bar{a}\times\bar{b})=\frac{\partial}{\partial x}(a_yb_z-a_zb_y)+\frac{\partial}{\partial y}(a_zb_x-a_xb_z)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}(a_xb_y-a_yb_x)=\frac{\partial a_y}{\partial x}b_z+\frac{\partial b_z}{\partial x}a_y-\frac{\partial a_z}{\partial x}b_y-\frac{\partial b_y}{\partial x}a_z+$$
$$+\frac{\partial a_z}{\partial y}b_x+\frac{\partial b_x}{\partial y}a_z-\frac{\partial a_x}{\partial y}b_z-\frac{\partial b_z}{\partial y}a_x+$$
$$+\frac{\partial a_x}{\partial z}b_y+\frac{\partial b_y}{\partial z}a_x-\frac{\partial a_y}{\partial z}b_x-\frac{\partial b_x}{\partial z}a_y=$$
$$=b_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+b_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+b_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)-$$
$$-\left[a_x\left(\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial z}\right)+a_y\left(\frac{\partial b_x}{\partial z}-\frac{\partial b_z}{\partial x}\right)+a_z\left(\frac{\partial b_y}{\partial x}-\frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\right].$$

Выражения в скобках в первой строке есть проекции вектора $\operatorname{rot}\bar{a}$ соответственно на оси Ox, Oy, Oz, а во второй строке выражения в скобках являются проекциями на те же оси вектора $\operatorname{rot}\bar{b}$. Таким образом, правая часть есть разность скалярных произведений

$$\bar{b}\cdot\operatorname{rot}\bar{a}-\bar{a}\cdot\operatorname{rot}\bar{b}$$

и, следовательно, требуемое доказано.

Задача 14,22 *(дивергенция градиента)*. Доказать, что

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}f)=\Delta f,$$

где

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\qquad(14,10)$$

(Δf называется лапласианом функции f).

Решение. Известно, что

$$\operatorname{grad}f=\frac{\partial f}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}.$$

По (13,6)

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)'_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)'_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)'_z =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f,$$

что и требовалось.

Задача 14,23 *(дивергенция вихря)*. Доказать, что дивергенция вихря равна нулю, т. е.

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \bar{a}) = 0. \qquad (4,11)$$

Решение. По формуле (13,6)

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \bar{a}) = (\operatorname{rot}_x \bar{a})'_x + (\operatorname{rot}_y \bar{a})'_y + (\operatorname{rot}_z \bar{a})'_z.$$

Но

$$\operatorname{rot}_x \bar{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z};$$
$$\operatorname{rot}_y \bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x};$$
$$\operatorname{rot}_z \bar{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y},$$

поэтому

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \bar{a}) = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)'_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)'_y +$$
$$+ \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)'_z = \frac{\partial^2 a_z}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial z\,\partial x} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z\,\partial y} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y\,\partial z} = 0.$$

Задача 14,24 *(дивергенция лапласиана)*. Доказать формулу

$$\operatorname{div}(\Delta\bar{a}) = \Delta(\operatorname{div} \bar{a}). \qquad (14,12)$$

Решение. Выше в формуле (14,10) уже употреблялся термин «лапласиан». Возвратимся к этому весьма важному понятию. Оператором Лапласа называется выражение вида

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Если его применить к скалярной функции f, то

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Применяя оператор Лапласа к вектору $\bar{a}$, имеем

$$\Delta\bar{a} = \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial z^2}. \qquad (14,13)$$

Так как

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k},$$

то, применяя к вектору $\overline{a}$ оператор Лапласа, получаем

$$\Delta\overline{a} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right)\overline{k}. \qquad \text{(A)}$$

Отсюда, применяя оператор Лапласа к вектору $\overline{a}$, найдем

$$\Delta\overline{a} = \Delta a_x \cdot \overline{i} + \Delta a_y \cdot \overline{j} + \Delta a_z \cdot \overline{k}.$$

Используя формулу (А), докажем требуемое

$$\operatorname{div}(\Delta\overline{a}) = \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right)'_x + \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}\right)'_y + \left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right)'_z.$$

Выполняем в каждой скобке дифференцирование и почленно складываем:

$$\operatorname{div}(\Delta\overline{a}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right).$$

Выражение в круглых скобках (оно во всех слагаемых одно и то же) есть дивергенция вектора $\overline{a}$, а потому из последней формулы заключаем, что требуемое доказано.

Задача 14,25 — для самостоятельного решения *(вихрь градиента)*. Доказать, что вихрь градиента равен нулю, т. е. что

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0. \qquad (14,14)$$

Задача 14,26 (для самостоятельного решения) *(ротор векторного произведения)*. Доказать, что

$$\operatorname{rot}(\overline{a} \times \overline{b}) = \overline{a}\operatorname{div}\overline{b} - \overline{b}\operatorname{div}\overline{a} + \frac{d\overline{a}}{d\overline{b}} - \frac{d\overline{b}}{d\overline{a}}. \qquad (14,15)$$

Указание. Использовать формулу (14,8) для определения проекций вектора $\frac{d\overline{a}}{d\overline{b}}$ на координатные оси и найти проекции левой и правой части доказываемой формулы на координатные оси. Окажется, что проекция левой части этой формулы на ось Ox

$$\operatorname{rot}_x(\overline{a} \times \overline{b}) = \frac{\partial}{\partial y}(a_x b_y - a_y b_x) - \frac{\partial}{\partial z}(a_z b_x - a_x b_z). \qquad \text{(A)}$$

Проекция же на ось Ox правой части

$$a_x\left(\frac{\partial b_x}{\partial x}+\frac{\partial b_y}{\partial y}+\frac{\partial b_z}{\partial z}\right)-b_x\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)+$$
$$+\frac{\partial a_x}{\partial x}b_x+\frac{\partial a_x}{\partial y}b_y+\frac{\partial a_x}{\partial z}b_z-\frac{\partial b_x}{\partial x}a_x-\frac{\partial b_x}{\partial y}a_y-\frac{\partial b_x}{\partial z}a_z.$$

Продифференцировав выражение (A), найдем, что оно равно выражению (B).

Задача 14,27 (*вихрь вихря*). Доказать, что

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\overline{a})=\operatorname{grad}(\operatorname{div}\overline{a})-\Delta\overline{a}. \tag{14,16}$$

Решение. Обозначим

$$\operatorname{rot}\overline{a}=\overline{b}. \tag{A}$$

Тогда

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\overline{a})=\operatorname{rot}\overline{b}.$$

Проекция $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\overline{a})$ на ось Ox

$$[\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\overline{a})]_x=\operatorname{rot}_x\overline{b}=\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial z}. \tag{B}$$

Но из (A) следует, что

$$b_y=\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x},$$
$$b_z=\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

Подставляя эти значения в формулу (B), получим

$$[\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\overline{a})]_x=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)=$$
$$=\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\,\partial z}.$$

Прибавим и отнимем в правой части этого равенства $\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}$. Тогда

$$[\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\overline{a})]_x=\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\,\partial z}-$$
$$-\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}= \tag{C}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)-\Delta a_x=\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\overline{a})-\Delta a_x.$$

Аналогично докажем, что проекции вектора $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\overline{a})$ на оси Oy и Oz равны

$$[\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\overline{a})]_y=\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{div}\overline{a})-\Delta a_y; \tag{D}$$

$$[\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\overline{a})]_z=\frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{div}\overline{a})-\Delta a_z. \tag{E}$$

Умножая обе части равенств (C), (D) и (E) соответственно на $\overline{i}$, $\overline{j}$ и $\overline{k}$ и почленно складывая, получим требуемое.

Содержание. Гармонические функции. Формулы Грина.

Гармоническая функция. Функция $U = U(x, y, z)$, имеющая непрерывные частные производные по переменным x, y и z до второго порядка включительно, называется гармонической, если она удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Левая часть этого уравнения обозначается символом ΔU и называется лапласианом функции U.

Задача 15,1. Показать, что из формулы Остроградского (13, 17) следует

$$\iiint\limits_{(v)} \Delta U \cdot dv = \iint\limits_{(s)} \frac{\partial U}{\partial n}\, ds,$$

причем $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности s, а ΔU — лапласиан функции U.

Решение. На основании формулы (13, 17), прочитывая ее справа налево, найдем

$$\iiint\limits_{(v)} \operatorname{div} \bar{a}\, dv = \iint\limits_{(s)} a_n\, ds. \tag{A}$$

Если вектор $\bar{a}$ является градиентом скалярной функции $U = U(x, y, z)$, то

$$a_x = (\operatorname{grad} U)_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad a_y = (\operatorname{grad} U)_y = \frac{\partial U}{\partial y};$$
$$a_z = (\operatorname{grad} U)_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Учитывая, что $\operatorname{div} \bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$, получим

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

или

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U$$

(эта формула уже была выведена в задаче 14,22).

Известно, что проекция a_n вектора $\bar{a} = \text{grad } U$ на нормаль $\bar{n}$ равна $\frac{\partial U}{\partial n}$ — см. формулу (11,8).

Теперь, полагая в (A) вектор $\bar{a} = \text{grad } U$, получаем требуемую формулу

$$\iiint\limits_{(v)} \Delta U dv = \iint\limits_{(s)} \frac{\partial U}{\partial n} ds.$$

Задача 15,2. (для самостоятельного решения). Основываясь на результатах предыдущей задачи, доказать, что если $U = U(x, y, z)$ — гармоническая функция во всех точках области v, ограниченной поверхностью s, то

$$\iint\limits_{(s)} \frac{\partial U}{\partial n} ds = 0,$$

т. е. поток градиента гармонической функции через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Задача 15,3 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $U = \frac{1}{r}$ $\left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ — гармоническая функция во всех точках, где она и ее частные производные до второго порядка включительно непрерывны.

Задача 15,4 (для самостоятельного решения). Доказать, что если функция $\varphi(x, y, z)$ — гармоническая, то и функция $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ также гармоническая.

Указание. Продифференцировать по x уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Задача 15,5 (для самостоятельного решения). Доказать, что если $U(x, y, z)$ — гармоническая функция, то и выражение

$$x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} + z\frac{\partial U}{\partial z}$$

есть также функция гармоническая.

Указание. Учесть, что, например,

$$\Delta\left(x\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + x\Delta\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta U\right),$$

где Δ оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

а если U — гармоническая функция, то $\Delta U = 0$.

Задача 15,6 (для самостоятельного решения). Доказать, что если $U = U(x, y, z)$ — гармоническая функция, то выражение

$$\frac{1}{r} \cdot U\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, — также гармоническая функция.

Задача 15.7. Доказать, применяя формулу Остроградского, что

$$\iiint\limits_{(\tau)} \left(U\Delta V + \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) d\tau = \iint\limits_{(S)} U \frac{\partial V}{\partial n}\, ds,$$

где τ — объем, S — ограничивающая его поверхность, $\frac{\partial V}{\partial n}$ — производная функции V по внешней нормали, а

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Решение. Рассмотрим вектор $U \operatorname{grad} V$, где функция $U = U(x, y, z)$, и найдем его дивергенцию

$$\operatorname{div}(U \operatorname{grad} V) = \frac{\partial}{\partial x}(U \operatorname{grad} V)_x + \frac{\partial}{\partial y}(U \operatorname{grad} V)_y + \frac{\partial}{\partial z}(U \operatorname{grad} V)_z.$$

Учитывая, что

$$(U \operatorname{grad} V)_x = U\frac{\partial V}{\partial x}; \quad (U \operatorname{grad} V)_y = U\frac{\partial V}{\partial y}; \quad (U \operatorname{grad} V)_z = U\frac{\partial V}{\partial z},$$

получаем

$$\operatorname{div}(U \operatorname{grad} V) = \frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial V}{\partial z}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + U\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} + U\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right).$$

Раскрывая скобки и учитывая, что $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V$, находим

$$\operatorname{div}(U \operatorname{grad} V) = U\Delta V + \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}. \qquad \text{(A)}$$

Проекция на нормаль к поверхности S вектора $U \operatorname{grad} V$ равна

$$(U \operatorname{grad} V)_n = U\frac{\partial V}{\partial n}. \qquad \text{(B)}$$

Полагая теперь в формуле (13, 17)

$$\bar{a} = \operatorname{grad} V,$$

получаем

$$\iiint\limits_{(\tau)} \operatorname{div}(U \operatorname{grad} V)\, d\tau = \iint\limits_{(S)} (U \operatorname{grad} V)_n\, ds,$$

а используя равенства (A) и (B), имеем доказываемое равенство

$$\iiint\limits_{(\tau)}\left(U\Delta V+\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)=\iint\limits_{(S)}U\frac{\partial V}{\partial n}\,ds. \qquad (C)$$

Учитывая, что вектор

$$\operatorname{grad}U=\frac{\partial U}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\bar{k},$$

а вектор

$$\operatorname{grad}V=\frac{\partial V}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\bar{k},$$

для их скалярного произведения получаем

$$\operatorname{grad}U\cdot\operatorname{grad}V=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Поэтому формула (C) может быть записана так:

$$\iiint\limits_{(\tau)}U\Delta V\,d\tau+\iiint\limits_{(\tau)}(\operatorname{grad}U\cdot\operatorname{grad}V)\,d\tau=\iint\limits_{(S)}U\frac{\partial V}{\partial n}ds.$$

Задача 15,8 (для самостоятельного решения). Основываясь на результате, полученном в предыдущей задаче, доказать, что

$$\iiint\limits_{(\tau)}U\Delta U\,d\tau+\iiint\limits_{(\tau)}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]d\tau=\iint\limits_{(S)}U\frac{\partial U}{\partial n}\,ds.$$

Указание. В формуле (C) предыдущей задачи взять $V=U$.

Задача 15,9 (для самостоятельного решения). Из формулы предыдущей задачи, считая, что U — гармоническая функция, получить формулу

$$\iiint\limits_{(V)}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]d\tau=\iint\limits_{(S)}U\frac{\partial U}{\partial n}\,ds.$$

(в гидродинамике эта формула используется при вычислении кинетической энергии в безвихревом движении жидкости).

Задача 15, 10. Исходя из результата задачи (15, 7), вывести первую формулу Грина

$$\iiint\limits_{(\tau)}(U\Delta V-V\Delta U)=\iint\limits_{(S)}\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds \qquad (15,1)$$

$\Big($производные $\frac{\partial U}{\partial n}$ и $\frac{\partial V}{\partial n}$ вычисляются по внешней нормали к поверхности $S\Big)$.

Решение. В указанной задаче была получена формула

$$\iiint\limits_{(\tau)} U\Delta V\,d\tau + \iiint\limits_{(\tau)} (\operatorname{grad} U\cdot \operatorname{grad} V)\,d\tau = \iint\limits_{(S)} U\,\frac{\partial V}{\partial n}\,ds. \qquad (A)$$

Поменяем в этой формуле местами функции U и V:

$$\iiint\limits_{\tau} V\Delta U\,d\tau + \iiint\limits_{(\tau)} (\operatorname{grad} V\cdot \operatorname{grad} U)\,d\tau = \iint\limits_{(S)} V\,\frac{\partial U}{\partial n}\,ds. \qquad (B)$$

Вычтем из равенства (A) равенство (B), учитывая, что скалярное произведение

$$\operatorname{grad} U\cdot \operatorname{grad} V = \operatorname{grad} V\cdot \operatorname{grad} U,$$

и получим первую формулу Грина:

$$\iiint\limits_{(\tau)} (U\Delta V - V\Delta U)\,d\tau = \iint\limits_{(S)} \left(U\,\frac{\partial V}{\partial n} - V\,\frac{\partial U}{\partial n}\right) ds.$$

Подчеркиваем, что эта формула имеет место для функций U и V, непрерывных вместе с их производными первого и второго порядка в области τ, ограниченной поверхностью S. Стоящие в правой части формулы производные $\frac{\partial U}{\partial n}$ и $\frac{\partial V}{\partial n}$ берутся по направлению внешней нормали к поверхности S. Формулу Грина можно записать в удобном для запоминания виде:

$$\iiint\limits_{(\tau)} \begin{vmatrix} U & V \\ \Delta U & \Delta V \end{vmatrix} d\tau = \iint\limits_{(S)} \begin{vmatrix} U & V \\ \frac{\partial U}{\partial n} & \frac{\partial V}{\partial n} \end{vmatrix} ds.$$

Задача 15, 11. Применить первую формулу Грина

$$\iiint\limits_{(\tau)} (U\Delta V - V\Delta U)\,d\tau = \iint\limits_{(S)} \left(U\,\frac{\partial V}{\partial n} - V\,\frac{\partial U}{\partial n}\right) ds$$

к функции $U = \frac{1}{r}$, где r — расстояние от постоянной точки $A(a, b, c)$ области τ до переменной в этой области точки $P(x, y, z)$.

Решение. Расстояние

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Функция U будет непрерывной функцией со своими частными производными во всех точках области τ за исключением точки A, где $r = 0$. В этой точке сама функция $U = \frac{1}{r}$ и ее производные претерпевают разрыв непрерывности.

Известно, что функция $\frac{1}{r}$ — гармоническая функция всюду, где она непрерывна, вместе со своими частными производными до второго порядка включительно. Значит, в нашем случае эта функция будет гармонической во всей области τ за исключением точки A.

Выделим из объема τ сферу σ, описанную из точки A радиусом ρ, таким, что σ и τ не имеют общих точек. Часть области τ, полученную после этого выделения, назовем τ_1, причем в области τ_1 функция $U = \frac{1}{r}$ будет гармонической, а потому в ней $\Delta U = \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$. По формуле Грина (15,1) для тройного интеграла, распространенного на область τ_1, учитывая, что $U = \frac{1}{r}$ и в области τ_1 $\Delta U = 0$, будем иметь

$$\iiint\limits_{(\tau_1)} \frac{1}{r}\Delta V\, d\tau = \iint\limits_{(S)} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right) ds +$$

$$+ \iint\limits_{(\sigma)} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n_1} - V\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_1}\right) d\sigma, \tag{A}$$

причем во втором интеграле правой части производные $\frac{\partial V}{\partial n_1}$ и $\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_1}$ берутся по внутренней нормали к поверхности σ.

Рассмотрим предельное значение равенства (A), когда радиус ρ сферы σ стремится к нулю. В этом случае область τ_1 будет стремиться к области τ и тройной интеграл левой части равенства (A) будет стремиться к тройному интегралу, распространенному на область τ

$$\lim_{\rho\to 0}\iiint\limits_{(\tau)} \frac{1}{r}\Delta V\, d\tau = \iiint\limits_{(\tau)} \frac{1}{r}\Delta V\, d\tau.$$

Первый интеграл в правой части равенства (A) распространен на поверхность S, от ρ не зависит, поэтому при $\rho \to 0$ сохранит значение, которое имеет в равенстве (A). Остается рассмотреть предел второго интеграла правой части равенства (A) при $\rho \to 0$.

$$\lim_{\rho\to 0}\iint\limits_{(\sigma)} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n_1} - V\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_1}\right) d\sigma =$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\iint\limits_{(\sigma)} \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n_1}\, d\sigma - \lim_{\rho\to 0}\iint\limits_{(\sigma)} V\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_1}\, d\sigma. \tag{B}$$

Определим сначала первый предел в правой части этого равенства. На поверхности сферы σ $r = \rho$, поэтому $\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho}$. Обозначим через $\left(\frac{\partial V}{\partial n_1}\right)_Q$ значение производной $\frac{\partial V}{\partial n_1}$ в некоторой точке Q на сфере σ. Тогда, используя теорему о среднем, получаем

$$\lim_{\rho\to0}\iint\limits_{(\sigma)}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n_1}\,d\sigma = \lim_{\rho\to0}\left\{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial V}{\partial n_1}\right)_Q\iint\limits_{(\sigma)}d\sigma\right\} =$$

$$= \lim_{\rho\to0}\left\{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial V}{\partial n_1}\right)_Q\cdot 4\pi\rho^2\right\} = 4\pi\left(\frac{\partial V}{\partial n_1}\right)_Q\cdot\lim_{\rho\to0}\rho = 0$$

(учтено, что $\iint\limits_{(\sigma)} d\sigma = 4\pi\rho^2$, т. е. равен площади поверхности сферы σ).

Что касается второго предела в правой части равенства (B), то прежде чем его вычислять, учтем, что нормаль к сфере σ и ее радиус совпадают, но направление нормали противоположно направлению радиуса-вектора $\bar{\rho}$ точек поверхности сферы. Поэтому вычисление производной по нормали n_1 можно заменить вычислением производной по ρ, но тогда

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_1} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho^2}. \tag{C}$$

Если теперь обозначить через $(V)_{Q_1}$ значение функции V в некоторой точке Q_1 сферы σ и учесть (C), то для рассматриваемого предела найдем

$$-\lim_{\rho\to0}\iint\limits_{(\sigma)}V\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_1}\,d\sigma = -\lim_{\rho\to0}(V)_{Q_1}\cdot\frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{(\sigma)}d\sigma =$$

$$= -\lim(V)_{Q_1}\cdot\frac{1}{\rho^2}\cdot 4\pi\rho^2 = -4\pi\cdot\lim_{\rho\to0}(V)_{Q_1} = -4\pi(V)_A,$$

так как при $\rho\to0$ тогда Q_1 поверхности схеры σ будет стремиться к точке A.

Таким образом,

$$-\lim_{\rho\to0}\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n_1} - V\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_2}\right)d\sigma = -4\pi(V)_A$$

и равенство (A) дает

$$\iiint\limits_{(\tau)} \frac{1}{r}\,\Delta V\,d\tau = \iint\limits_{(S)} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right) ds - 4\pi\,(V)_A.$$

Отсюда окончательно

$$(V)_A = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{(\tau)} \frac{1}{r}\,\Delta V\,d\tau + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)} \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}\,ds - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)} V\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\,ds. \tag{D}$$

З а м е ч а н и е. Проведенные рассуждения понадобились нам в связи с тем, что точка A находилась внутри области τ, поэтому функция $U=\frac{1}{r}$ в этой точке претерпевала разрыв непрерывности. Если бы точка A находилась вне области τ, то функция $\frac{1}{r}$, как функция точки $P(x, y, z)$, была бы непрерывной и тогда, учитывая, что эта функция гармоническая, т. е. что $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0$, мы из первой формулы Грина сразу бы получили

$$\iiint\limits_{(\tau)} \frac{1}{r}\,\Delta V\,d\tau = \iiint\limits_{(S)} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right) ds.$$

Эта формула называется второй формулой Грина.

Если функция $V=V(x, y, z)$ — гармоническая в области τ, то $\Delta V=0$ и тогда формула (D) запишется так:

$$V_A = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)} \left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial n} - V\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right] ds. \tag{15,2}$$

Эта формула дает выражение гармонической функции внутри области через значения, принимаемые данной функцией и ее производной по нормали на границе этой области.

Задача 15, 12. Доказать, что если функция $V=V(x, y, z)$ — гармоническая функция в некоторой области, а S — сфера радиуса R с центром в точке $A(a, b, c)$, лежащая со своими внутренними точками в этой области, то

$$V_A = \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{(S)} V\,ds.$$

Р е ш е н и е. Формулу (15,2), полученную в предыдущей задаче, применим к случаю, когда S — сфера радиуса R.

Вычисляя первый интеграл этой формулы, следует r заменить его значением на поверхности сферы, т. е. на R, а величину $\frac{1}{R}$, как постоянную, вынести за знак интеграла

$$\iint\limits_{(S)} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} ds = \frac{1}{R} \iint\limits_{(S)} \frac{\partial V}{\partial n} ds = 0,$$

так как V — гармоническая функция, а поэтому $\iint\limits_{(S)} \frac{\partial V}{\partial n} ds = 0$. (см. задачу 15,2).

Во втором интеграле производная от функции $\frac{1}{r}$, вычисленная по внешней нормали, будет равна производной от этой функции по R, так как нормаль к сфере совпадает с ее радиусом, причем направление внешней нормали совпадает с направлением радиуса вектора $\bar{R}$ точек сферы. Значение этой производной должно быть вычислено на поверхности сферы, т. е. при $r = R$. Итак,

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = \frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial R} = -\frac{1}{R^2}.$$

Учитывая эти рассуждения, получаем для значения функции V в центре сферы A

$$V_A = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{(S)} -V \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} ds = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{(S)} -V \cdot \left(-\frac{1}{R^2}\right) ds =$$

$$= \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{(S)} V\, dS,$$

что и требовалось доказать.

Это равенство выражает теорему Гаусса: *значение гармонической функции в центре сферы есть среднее арифметическое из ее значений на поверхности сферы.*

Если V — потенциал скорости жидкости, то эта формула выражает среднее значение потенциала скорости жидкости на любой сферической поверхности, которой ограничивается объем, целиком лежащий в жидкости, и показывает, что это среднее значение равно значению потенциала скорости в центре сферы.

Содержание. Оператор Гамильтона

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Студентам рекомендуется изучать этот вопрос по книге Н. Е. Кочина «Векторное исчисление и начало тензорного исчисления».

Под оператором Гамильтона понимается символический дифференциальный оператор, обозначаемый знаком ∇ (набла) и определяемый в декартовой системе координат равенством

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}, \tag{16,1}$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы координатных осей Ox, Oy, Oz. Этот оператор в дальнейшем называется «Оператор ∇».

Основная цель введения оператора ∇ состоит в упрощении таких операций над векторами и скалярами, как получение градиента скалярной функции, образование дивергенции и ротора вектора, образование оператора Лапласа.

Следует запомнить, что оператор ∇ является символическим вектором.

Оператор ∇ часто встречается в приложениях векторного анализа и усвоение правил обращения с ним значительно облегчает изучение, например, такого предмета, как электротехника.

Хотя вектор ∇ является символическим вектором, а не реальным, мы будем формально считать, что он обладает свойствами реального вектора, и рассматривать его произведение на скалярную функцию, скалярное и векторное произведение его на векторы, а также и другие операции с ним.

Это не должно смущать читателя, так как из дальнейшего видно, что в результате воздействия оператора ∇ на скаляры и векторы получаются величины, имеющие не символический, а вполне реальный определенный смысл. (Однако укажем, что недопустимо употреблять, например, такие термины: «вектор ∇ параллелен вектору $\bar{a}$» или «вектор ∇ перпендикулярен вектору $\bar{a}$». Бессмысленно также, например, говорить, что «вектор ∇ равен вектору $\bar{a}$», так как символический вектор ∇ не может быть равен реальному вектору $\bar{a}$, как он не может быть ему параллелен или перпендикулярен).

В дальнейшем приняты такие обозначения:

1. Для численного произведения вектора $\bar{a}$ на функцию $\varphi(x, y, z)$

$$\bar{a}\varphi(x, y, z).$$

2. Для скалярного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$

$$\bar{a}\cdot\bar{b}.$$

3. Для векторного произведения двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$

$$\bar{a}\times\bar{b}.$$

4. Из (16,1) видно, что проекции оператора ∇ на оси прямоугольной системы координат равны

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}; \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Сводка правил обращения с оператором

1. Оператор ∇ действует на величины, стоящие за ним, и не действует на величины, которые стоят перед ним. Так, в записи $(\bar{a}\cdot\nabla)\varphi$ оператор ∇ действует на φ и не действует на $\bar{a}$.

Иногда для того, чтобы указать величину, на которую не распространяется действие оператора ∇, у этой величины ставится индекс, показывающий, что данная величина рассматривается как постоянная Например, в записи $(\nabla\cdot\bar{a}_c)\varphi$ следует считать, что ∇ на $\bar{a}_c$ не действует, а на φ действует.

Выражение такого вида надо, если это возможно, преобразовать так, чтобы величины с индексом c стали впереди ∇. Как только это будет достигнуто, индекс c можно опустить, поскольку оператор ∇ на величины, стоящие перед ним, не действует.

2. Численное произведение оператора ∇ на сумму двух функций вычисляется по формуле

$$\nabla(\varphi + \psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi. \tag{16,2}$$

3. Скалярное произведение оператора ∇ на сумму двух векторов вычисляется по формуле

$$\nabla\cdot(\bar{a} + \bar{b}) = \nabla\cdot\bar{a} + \nabla\cdot\bar{b}. \tag{16,3}$$

4. Векторное произведение оператора ∇ на сумму двух векторов вычисляется по формуле

$$\nabla\times(\bar{a} + \bar{b}) = \nabla\times\bar{a} + \nabla\times\bar{b}. \tag{16,4}$$

5. Произведение $\nabla\varphi$ оператора ∇ на скалярную функцию φ равно градиенту функции φ, так как

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)\varphi =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(\bar{i}\varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{j}\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{k}\varphi) =$$
$$= \bar{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \operatorname{grad}\varphi,$$

$$\boxed{\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi} \qquad (16,5)$$

При вычислении, например $\frac{\partial}{\partial x}(\bar{i}\varphi)$, постоянный вектор $\bar{i}$ вынесен за знак производной. Так же было сделано и при вычислении $\frac{\partial}{\partial y}(\bar{j}\varphi)$ и $\frac{\partial}{\partial z}(\bar{k}\varphi)$.

6. Скалярное произведение оператора ∇ на вектор
$\bar{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\,\bar{i} + a_y(x, y, z)\,\bar{j} + a_z(x, y, z)\,\bar{k}$
равно дивергенции вектора $\bar{a}$.

Действительно, так как $\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}$; $\nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}$; $\nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}$, то скалярное произведение $\nabla\cdot\bar{a}$, равное алгебраической сумме произведений одноименных проекций, можно записать в виде

$$\nabla\cdot\bar{a} = \frac{\partial}{\partial x}a_x + \frac{\partial}{\partial y}a_y + \frac{\partial}{\partial z}a_z.$$

Если теперь условиться под произведением $\frac{\partial}{\partial x}a_x$ понимать частную производную от a_x по x, т. е. $\frac{\partial a_x}{\partial x}$, и аналогично считать, что $\frac{\partial}{\partial y}a_y = \frac{\partial a_y}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}a_z = \frac{\partial a_z}{\partial z}$,
то

$$\nabla\cdot\bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \operatorname{div}\bar{a}.$$

$$\boxed{\nabla\cdot\bar{a} = \operatorname{div}\bar{a}} \qquad (16,6)$$

7. Векторное произведение оператора ∇ на вектор

$$\bar{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\,\bar{i} + a_y(x, y, z)\,\bar{j} + a_z(x, y, z)\,\bar{k}.$$

равно ротору вектора $\bar{a}$.

Действительно, так как векторное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ вычисляется по формуле

$$\bar{b} \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix},$$

то, заменяя здесь вектор $\bar{b}$ оператором $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$ и учитывая, что проекции оператора ∇ на координатные оси

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}; \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z},$$

будем иметь

$$\nabla \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\bar{k} = \operatorname{rot}\bar{a}.$$

$$\boxed{\nabla \times \bar{a} = \operatorname{rot}\bar{a}} \qquad (16,7)$$

8. Оператор ∇ применяется к скалярному и векторному произведению двух множителей так, как к ним применяется производная, т. е. для того чтобы применить оператор к произведению двух множителей, надо образовать сумму двух слагаемых, в каждом из которых оператор действует только на один из сомножителей, в то время как другой остается постоянным. Например,

$$\boxed{\nabla(\bar{a} \times \bar{b}) = \nabla(\bar{a} \times \bar{b}_c) + \nabla(\bar{a}_c \times \bar{b})} \qquad (16,8)$$

причем наличие у вектора индекса c, как указывалось выше, означает, что на этот вектор оператор ∇ не действует.

Выражения, полученные от воздействия оператора ∇ на произведение двух сомножителей, надо преобразовать так, чтобы постоянные сомножители были поставлены перед оператором ∇.

Дифференциальные операции первого порядка

Задача 16,1. Найти градиент произведения двух функций f_1 и f_2.

Решение. По правилу 8 из сводки правил, применяя формулу (16,5), имеем

$$\operatorname{grad}(f_1 f_2) = \nabla(f_1 f_2) = \nabla(f_{1c} f_2) + \nabla(f_1 f_{2c}).$$

В первом слагаемом правой части равенства оператор ∇ не действует на постоянный множитель f_{1c}, а во втором — на постоянный множитель f_{2c}. Поэтому эти множители в каждом слагаемом правой части могут быть вынесены за знак оператора и мы получаем

$$\operatorname{grad}(f_1 f_2) = f_{1c}\nabla f_2 + f_{2c}\nabla f_1.$$

Применяя теперь в правой части этого равенства формулу (16,5) и опуская индекс c за ненадобностью, получаем окончательно

$$\boxed{\operatorname{grad}(f_1 f_2) = f_1\nabla f_2 + f_2\nabla f_1} \qquad (16,9)$$

Задача 16,2. Найти дивергенцию произведения $\varphi\bar{a}$, где φ — функция.

Решение. По формуле (16,6)

$$\operatorname{div}(\varphi\bar{a}) = \nabla\cdot(\varphi\bar{a}).$$

В правой части этого равенства оператор ∇ применяется к численному произведению функции на вектор, поэтому на основании правила 8 из сводки правил

$$\nabla\cdot(\varphi\bar{a}) = \nabla\cdot(\varphi_c\bar{a}) + \nabla\cdot(\varphi\bar{a}_c) = \varphi_c(\nabla\cdot a) + a_c\nabla\varphi.$$

Запись второго слагаемого правой части в виде $\bar{a}_c\cdot(\nabla\cdot\varphi)$ была бы неверной, так как под $(\nabla\cdot\varphi)$ следует понимать скалярное произведение вектора-оператора ∇ на функцию φ, чего быть не может, поскольку понятие скалярного произведения относится к произведению двух векторов.

Замечая на основании (16,6), что $\nabla\cdot\vec{a} = \operatorname{div}\vec{a}$, а на основании (16,5) $\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi$ и опуская индекс c, получаем окончательно

$$\boxed{\operatorname{div}(\varphi\bar{a}) = \varphi\operatorname{div}\bar{a} + \bar{a}\cdot\operatorname{grad}\varphi} \qquad (16,10)$$

Эта формула была уже получена в задаче 14,2.

Задача 16,3 (для самостоятельного решения). Найти дивергенцию поля $\varphi(r)\bar{r}$, где $\bar{r}$ — радиус-вектор.

Указание. Использовать формулу (16,10) и учесть, что если $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, то $\operatorname{div}\bar{r} = 3$, а на основании результата задачи 11,3 $\operatorname{grad}\varphi(r) = \varphi'(r)\bar{r}^\circ$, где $\bar{r}^0$ — единичный вектор вектора $\bar{r}$.

Ответ. $\operatorname{div}[\varphi(r)\bar{r}] = 3\varphi(r) + \bar{r}\bar{r}^\circ\varphi'(r)$.

Задача 16,4. Найти ротор произведения $\varphi\bar{a}$.

Решение. На основании формулы (16,7) и правила 8 из сводки правил

$$\operatorname{rot}(\varphi\bar{a}) = \nabla\times(\varphi\bar{a}) = \nabla\times(\varphi_c\bar{a}) + \nabla\times(\varphi\bar{a}_c) =$$
$$= \varphi_c(\nabla\times a) - a_c\times(\nabla\varphi).$$

Изменение между слагаемыми плюса на минус объясняется тем, что в случае векторного произведения перестановка сомножителей влечет за собой изменение знака векторного произведения.

Замечая, что на основании формулы (16,7) $\nabla \times \bar{a} = \operatorname{rot} \bar{a}$, а по формуле (16,5) $\nabla\varphi = \operatorname{grad} \varphi$, получаем окончательно, опуская индексы в последнем равенстве

$$\boxed{\operatorname{rot} (\varphi a) = \varphi \operatorname{rot} \bar{a} - \bar{a} \times \operatorname{grad} \varphi} \tag{16,11}$$

Эта формула также была получена в задаче 14,19.

Задача 16,5 (для самостоятельного решения). Вычислить ротор поля $\varphi(r) \cdot \bar{r}$, где $\bar{r}$ — радиус-вектор.

Указание. Использовать формулу (16,11) и учесть, что векторы $\bar{r}$ и $\operatorname{grad} \varphi(r)$ — коллинеарны, так как $\operatorname{grad} \varphi(r) = \varphi'(r)\bar{r}^\circ$, $\bar{r}^\circ$ — для вектора $\bar{r}$ является единичным вектором, а также то, что векторное произведение двух коллинеарных векторов равно нулю. Установить, что ротор радиуса вектора $\bar{r}$ равен нулю ($\operatorname{rot} \bar{r} = 0$).

Ответ.

$$\boxed{\operatorname{rot} [\varphi(r) \cdot \bar{r}] = 0} \tag{16,12}$$

Задача 16,6. Найти $\operatorname{div} (\bar{a} \times \bar{b})$.

Решение. На основании формулы (16,6) и правила 8 из сводки правил

$$\operatorname{div} (\bar{a} \times \bar{b}) = \nabla \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = \nabla \cdot (a_c \times \bar{b}) + \nabla \cdot (\bar{a} \times \bar{b}_c). \tag{A}$$

Дальнейшее преобразование сводится к тому, чтобы постоянные множители в каждом из слагаемых правой части оказались перед оператором ∇. В данном случае следует использовать свойство цикличности смешанного произведения трех векторов, согласно которому

$$\boxed{a \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = b \cdot (c \times \bar{a}) - c \cdot (\bar{a} \times \bar{b})} \tag{16,13}$$

Преобразуем отдельно на основании этой формулы каждое слагаемое правой части равенства (А)

$$\nabla \cdot (\bar{a}_c \times \bar{b}) = \bar{a}_c \cdot (\bar{b} \times \nabla).$$

Теперь в векторном произведении $\bar{b} \times \nabla$ переставим местами векторы $\bar{b}$ и ∇ и так как от такой перестановки знак векторного произведения изменяется на обратный, то

$$\bar{b} \times \nabla = -\nabla \times \bar{b}.$$

Замечая, что по (16,7) $-\nabla \times \bar{b} = -\operatorname{rot} \bar{b}$ и опуская индекс c у $\bar{a}_c$, получим окончательно для первого слагаемого

$$\nabla \cdot (\bar{a}_c \times \bar{b}) = -\bar{a} \cdot \operatorname{rot} \bar{b}.$$

Используя снова формулу (16.13), преобразуем второе слагаемое в равенстве (А)

$$\nabla \cdot (\bar{a} \times \bar{b}_c) = \bar{b}_c \cdot (\nabla \times \bar{a}) = \bar{b}_c \cdot \operatorname{rot} \bar{a} = \bar{b} \operatorname{rot} \bar{a},$$

так как $\nabla \times \bar{a} = \operatorname{rot} a$, а индекс c у $\bar{b}_c$ может быть опущен.

Итак, окончательно

$$\boxed{\operatorname{div} (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{b} \cdot \operatorname{rot} \bar{a} - \bar{a} \cdot \operatorname{rot} \bar{b}} \tag{16,14}$$

Эта формула также была получена выше, в задаче 14,21.

При решении следующих задач придется пользоваться формулой для вычисления двойного векторного произведения *.

$$\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = \bar{B}\ (\bar{A} \cdot \bar{C}) - \bar{C}\,(\bar{A} \cdot \bar{B}), \tag{16,15}$$

согласно которой *двойное векторное произведение* $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C})$ *равно произведению среднего вектора* $\bar{B}$ *на скалярное произведение двух других минус правый крайний вектор* $\bar{C}$, *умноженный на скалярное произведение двух других.*

Формула (16,15) может быть записана в удобном для запоминания виде и так:

$$\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = \begin{vmatrix} \bar{B} & \bar{C} \\ \bar{A} \cdot \bar{B} & \bar{A} \cdot \bar{C} \end{vmatrix}, \tag{16,16}$$

т. е. двойное векторное произведение равно определителю второго порядка, в первой строке которого элементами являются векторы, стоящие во внутренней скобке, написанные в том же порядке, а во второй строке элементами являются скалярные произведения этих векторов на первый вектор.

Задача 16,7. Определить $\operatorname{rot} (\bar{a} \times \bar{b})$.

Решение. На основании правила 8 из сводки правил и формулы (16,7)

$$\operatorname{rot} (\bar{a} \times \bar{b}) = \nabla \times (\bar{a} \times \bar{b}) = \nabla \times (\bar{a}_c \times \bar{b}) + \nabla \times (\bar{a} \times \bar{b}_c).$$

Каждое слагаемое в правой части представляет собой двойное векторное произведение, которое вычислим по формуле (16,16) и

---

* Вывод формулы (16,15) можно найти, например, в учебнике И. И. Привалова «Аналитическая геометрия».

преобразуем так, чтобы постоянные множители стояли перед знаком ∇:

$$\nabla \times (\bar{a}_c \times \bar{b}) = \begin{vmatrix} \bar{a}_c & \bar{b} \\ \nabla \cdot \bar{a}_c & \nabla \cdot \bar{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{a}_c & \bar{b} \\ \bar{a}_c \cdot \nabla & \operatorname{div} \bar{b} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что $\nabla \cdot \bar{a}_c = \bar{a}_c \cdot \nabla$, так как скалярное произведение двух векторов не зависит от их порядка, а постоянный множитель должен стоять перед знаком ∇, скалярное же произведение $\nabla \cdot \bar{b}$ на основании (16,6) равно $\operatorname{div} \bar{b}$.

Раскрывая последний определитель и опуская теперь за ненадобностью индекс c, получаем

$$\nabla \times (\bar{a}_c \times \bar{b}) = \bar{a} \operatorname{div} \bar{b} - (\bar{a} \cdot \nabla) \bar{b}.$$

Точно так же

$$\nabla \times (\bar{a} \times \bar{b}_c) = \begin{vmatrix} \bar{a} & \bar{b}_c \\ \nabla \cdot \bar{a} & \nabla \cdot \bar{b}_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{a} & \bar{b}_c \\ \nabla \cdot \bar{a} & \bar{b}_c \cdot \nabla \end{vmatrix} =$$
$$= (\bar{b} \cdot \nabla) \bar{a} - \bar{b} \operatorname{div} \bar{a}.$$

(индекс c опущен; $\nabla \cdot \bar{a} = \operatorname{div} \bar{a}$).

Складывая полученные результаты, окончательно имеем

$$\operatorname{rot} (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a} \operatorname{div} \bar{b} - \bar{b} \operatorname{div} \bar{a} + (\bar{b} \cdot \nabla) \bar{a} - (\bar{a} \cdot \nabla) \bar{b}. \qquad (16,17)$$

Дополнительные сведения из теории

Выясним теперь смысл выражений вида $\bar{a} \cdot \nabla$, встретившихся в формуле (16,17), т. е. смысл скалярного произведения вектора $\bar{a}$ на оператор ∇, стоящий справа от него, (следует отличать выражение $\bar{a} \cdot \nabla$ от выражения $\nabla \cdot \bar{a}$)

Так как

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}; \ \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k},$$

то

$$\boxed{\bar{a} \cdot \nabla = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}}. \qquad (16,18)$$

Проекции a_x, a_y, a_z вектора $\bar{a}$ определяются по формулам

$$a_x = a \cos (\widehat{\bar{a}, x}); \ a_y = a \cos (\widehat{\bar{a}, y}); \qquad (B)$$
$$a_z = a \cos (\widehat{\bar{a}, z}),$$

поэтому по формуле (16,18)

$$\boxed{\bar{a} \cdot \nabla = a \cos (\widehat{\bar{a}, x}) \frac{\partial}{\partial x} + a \cos (\widehat{\bar{a}, y}) \frac{\partial}{\partial y} + a \cos (\widehat{\bar{a}, z}) \frac{\partial}{\partial z}} \qquad (16,19)$$

Выполним теперь операцию $a \cdot \nabla$ над функцией φ:

$$(\bar{a} \cdot \nabla)\varphi = a\cos(\widehat{\bar{a}, x})\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a\cos(\widehat{\bar{a}, y})\frac{\partial\varphi}{\partial y} + a\cos(\widehat{\bar{a}, z})\frac{\partial\varphi}{\partial z} =$$

$$= a\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(\widehat{\bar{a}, x}) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(\widehat{\bar{a}, y}) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(\widehat{\bar{a}, z})\right].$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках на основании (11,3) равно производной $\frac{\partial\varphi}{\partial a}$ от функции φ по направлению вектора $\bar{a}$, поэтому

$$\boxed{(\bar{a} \cdot \nabla)\varphi = a\frac{\partial\varphi}{\partial a}} \qquad (16,20)$$

т. е. *результат применения операции $\bar{a} \cdot \nabla$ к функции φ равен произведению длины вектора $\bar{a}$ на производную от функции φ по направлению вектора $\bar{a}$.*

На основании (16,20) операция $\bar{a} \cdot \nabla$ может быть записана в виде

$$\boxed{\bar{a} \cdot \nabla = a\frac{\partial}{\partial a}} \qquad (16,21)$$

Выполнение операции $\bar{a} \cdot \nabla$ над вектором $\bar{b}$ на основании (16,18) приводит к вектору

$$(\bar{a} \cdot \nabla)\bar{b} = a_x\frac{\partial\bar{b}}{\partial x} + a_y\frac{\partial\bar{b}}{\partial y} + a_z\frac{\partial\bar{b}}{\partial z}, \qquad (16,22)$$

откуда следует, если учесть равенство (В),

$$(\bar{a} \cdot \nabla)\bar{b} = a\cos(\widehat{\bar{a}, x})\frac{\partial\bar{b}}{\partial x} + a\cos(\widehat{\bar{a}, y})\frac{\partial\bar{b}}{\partial y} + a\cos(\widehat{\bar{a}, z})\frac{\partial\bar{b}}{\partial z} =$$

$$= a\left[\frac{\partial\bar{b}}{\partial x}\cos(\bar{a}, x) + \frac{\partial\bar{b}}{\partial y}\cos(a, y) + \frac{\partial\bar{b}}{\partial z}\cos(\widehat{a, z})\right]. \qquad (16,23)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, есть производная вектора $\bar{b}$ по направлению вектора $\bar{a}$, т. е. $\frac{\partial\bar{b}}{\partial a}$. Получаем окончательно

$$\boxed{(\bar{a} \cdot \nabla)\bar{b} = \bar{a}\frac{\partial\bar{b}}{\partial a}} \qquad (16,24)$$

Задача 16,8. Определить $\operatorname{grad}(\bar{a} \cdot \bar{b})$.

Решение. На основании (16,5) и правила 8 из сводки правил имеем

$$\operatorname{grad}(a \cdot \bar{b}) = \nabla(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \nabla(\bar{a}_c \cdot \bar{b}) + \nabla(\bar{a} \cdot \bar{b}_c). \qquad (16,25)$$

Перепишем (16,15) в виде

$$\bar{C}(\bar{A}\cdot\bar{B})=\bar{B}(\bar{A}\cdot\bar{C})-\bar{A}\times(\bar{B}\times\bar{C}). \qquad (16,26)$$

Для вычисления $\nabla(\bar{a}_c\cdot\bar{b})$ положим в (16,26), что

$$\bar{C}=\nabla;\ \bar{A}=\bar{a}_c;\ \bar{B}=\bar{b}.$$

Тогда

$$\nabla(\bar{a}_c\cdot\bar{b})=\bar{b}(\bar{a}_c\cdot\nabla)-\bar{a}_c\times(\bar{b}\times\nabla);$$

$$\nabla(\bar{a}_c\cdot\bar{b})=(\bar{a}_c\cdot\nabla)\bar{b}-a_c\times(\bar{b}\times\nabla). \qquad (16,27)$$

Так как в случае векторного произведения перестановка сомножителей изменяет знак векторного произведения, то в последнем равенстве

$$-a_c\times(\bar{b}\times\nabla)=\bar{a}_c\times(\nabla\times\bar{b}).$$

Но на основании (16,7)

$$\nabla\times b=\operatorname{rot}\bar{b},$$

а потому

$$-a_c\times(\bar{b}\times\nabla)=a_c\times\operatorname{rot}\bar{b}. \qquad (A)$$

Окончательно из (16,27)

$$\nabla(\bar{a}_c\cdot\bar{b})=(\bar{a}_c\cdot\nabla)\bar{b}+\bar{a}_c\times\operatorname{rot}\bar{b}.$$

Теперь преобразуем второе слагаемое (16,25) с помощью (16,26), полагая там

$$\bar{C}=\nabla;\ \bar{A}=\bar{b}_c;\ \bar{B}=\bar{a};$$

$$\nabla(\bar{a}\cdot\bar{b}_c)=\bar{a}(\bar{b}_c\cdot\nabla)-\bar{b}_c\times(\bar{a}\times\nabla)=$$

$$=(\bar{b}_c\cdot\nabla)\bar{a}+\bar{b}_c\times(\nabla\times\bar{a})=(\bar{b}_c\cdot\nabla)\bar{a}+\bar{b}_c\times\operatorname{rot}\bar{a}. \qquad (B)$$

Складывая полученные результаты (A) и (B) и опуская за ненадобностью индекс c, окончательно имеем

$$\operatorname{grad}(\bar{a}\cdot\bar{b})=(\bar{a}\cdot\nabla)\bar{b}+(\bar{b}\cdot\nabla)\bar{a}+\bar{a}\times\operatorname{rot}\bar{b}+b\times\operatorname{rot}\bar{a}. \qquad (16,28)$$

Задача 16.9 (для самостоятельного решения). Доказать, что для всякого постоянного вектора $\bar{a}$ имеет место соотношение

$$\nabla(\bar{a}\cdot\bar{b})=(\bar{a}\cdot\nabla)\bar{b}+\bar{a}\times\operatorname{rot}\bar{b}.$$

Задача 16,10 (для самостоятельного решения). Доказать, что из (16,28) при $\bar{a}=\bar{b}$ следует

$$\frac{1}{2}\operatorname{grad}a^2=(\bar{a}\cdot\nabla)\bar{a}+\bar{a}\times\operatorname{rot}\bar{a}. \qquad (16,29)$$

Задача 16,11. Рассмотреть ∇^2 — квадрат оператора ∇, понимая под этим скалярное произведение вектора ∇ на самого себя.

Решение. Помня, что скалярное произведение двух векторов равно алгебраической сумме произведений одноименных проекций и что проекции оператора ∇ на оси прямоугольной системы координат равны $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, получаем

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (16,30)$$

Но так как $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа Δ, то

$$\nabla^2 = \Delta, \qquad (16,31)$$

т. е. *квадрат оператора* ∇ *равен оператору Лапласа.* Поэтому уравнение Лапласа $\Delta\varphi = 0$ может быть записано в виде $\nabla^2\varphi = 0$.

Задача 16,12 (для самостоятельного решения). Доказать, что

$$(\nabla\varphi)^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2.$$

Задача 16,13. С помощью оператора ∇ найти

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi.$$

Решение. На основании (16,5) $\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi$, а на основании (16,6) $\operatorname{div}\bar{a} = \nabla \cdot \bar{a}$. Поэтому

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi$$

Из результата задачи (16,11) $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ и поэтому

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla^2\varphi. \qquad (16,32)$$

Учитывая (16,30), получаем

$$\boxed{\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}} \qquad (16,33)$$

Задача 16.14. Найти вихрь градиента скалярного поля, т. е. $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi$.

Решение. На основании (16,7) $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \nabla \times \operatorname{grad}\varphi$, а так как по (16,5) $\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi$, то

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \nabla \times \nabla\varphi.$$

Скалярный множитель φ можно вынести за знак векторного произведения, поэтому

$$\nabla \times \nabla\varphi = (\nabla \times \nabla)\,\varphi.$$

Но векторное произведение двух равных векторов равно нулю, а потому $\nabla \times \nabla = 0$ и окончательно

$$\boxed{\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0} \tag{16,34}$$

т. е. *вихрь градиента любого скалярного поля равен нулю.*

Задача 16,15. Найти $\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{a}$, где $\bar{a} = \bar{a}(x, y, z)$.

Решение. На основании (16,5) и (16,6)

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{a} = \nabla(\nabla \cdot \bar{a}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right).$$

Было бы ошибкой считать, что $\nabla(\nabla \cdot \bar{a}) = \nabla^2\bar{a}$, так как и при действиях с обыкновенными векторами умножение вектора $\bar{b}$ на скалярное произведение $\bar{b} \cdot \bar{c}$, т. е. $\bar{b} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c}) \neq b^2 \cdot \bar{c}$.

(Выражение $\nabla^2\bar{a}$ есть вектор, имеющий такой смысл: $\nabla^2\bar{a} = \frac{\partial^2\bar{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\bar{a}}{\partial z^2}$. Не следует смешивать $\nabla^2\bar{a}$ с $(\nabla\bar{a})^2$, как нельзя смешивать $\nabla^2\varphi$ с $(\nabla\varphi)^2$)

Задача 16,16. Определить $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a}$, где $\bar{a} = \bar{a}(x, y, z)$.

Решение. По формулам (16,6) и (16,7)

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a} = \nabla \cdot (\nabla \times \bar{a}).$$

Здесь мы имеем дело с векторно-скалярным произведением трех векторов. Из векторной алгебры известно, что это произведение обращается в нуль, если в него входят два равных вектора.

Таким образом

$$\boxed{\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a} = 0} \tag{16,35}$$

Более сложным путем получен этот результат в задаче (14,23).

Задача 16,17. Определить $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{a}$, где $\bar{a} = \bar{a}(x, y, z)$.

Решение. На основании (16,7) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{a} = \nabla \times (\nabla \times \bar{a})$. Используя теперь формулу (16,16) для двойного векторного произведения, получаем

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{a}) = \begin{vmatrix} \nabla & \bar{a} \\ \nabla \cdot \nabla & \nabla \cdot \bar{a} \end{vmatrix} = \nabla(\nabla \cdot \bar{a}) - (\nabla \cdot \nabla)\,\bar{a}.$$

Но на основании (16,6) $\nabla \cdot \bar{a} = \operatorname{div} \bar{a}$, а по (16,5) $\nabla (\operatorname{div} \bar{a}) =$ $= \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{a}$. На основании задачи 16,11 $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$, поэтому окончательно

$$\boxed{\nabla \times (\nabla \times \bar{a}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{a} - \nabla^2 \bar{a}} \qquad (16,36)$$

В задаче 14,27 эта формула была получена значительно более сложными выкладками.

Содержание. Криволинейные координаты. Ортогональные криволинейные координаты. Запись в ортогональных криволинейных координатах основных дифференциальных операций теории поля: градиента, дивергенции, ротора и оператора Лапласа. Выражения градиента, дивергенции, ротора и оператора Лапласа в цилиндрической и сферической системах координат.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

На предыдущих практических занятиях мы пользовались такими пространственными системами координат: прямоугольной, цилиндрической и сферической. В каждой из этих систем положение точки в пространстве определяется тройкой чисел (u, v, w), причем различным точкам однозначно соответствуют различные тройки чисел по определенному закону, присущему данной системе координат. В прямоугольной системе координат такой тройкой чисел являются (x, y, z) — абсцисса, ордината и аппликата точки.

В цилиндрической системе координат положение точки в пространстве однозначно определяется тройкой чисел (r, φ, z), которые называются цилиндрическими координатами точки. Здесь r и φ — полярные координаты проекции точки на плоскость xOy

$$(0 \leqslant \varphi < 2\pi); \quad (0 < r < +\infty),$$

а z — ее аппликата $(-\infty < z < +\infty)$.

Между прямоугольными и цилиндрическими координатами точки существует зависимость, определяемая формулами

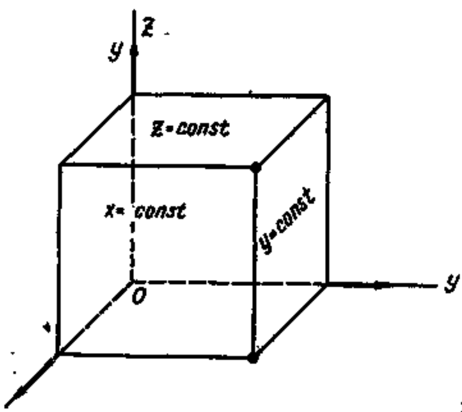
$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z. \tag{17,1}$$

В сферической системе координат положение точки в пространстве однозначно определяется тройкой чисел (ρ, θ, φ), которые называются сферическими координатами точки. Здесь ρ — расстояние точки от начала координат $(0 < \rho < +\infty)$, θ — угол между радиусом-вектором точки и положительным направлением оси Oz $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$, φ — угол между положительным направлением оси Ox и проекцией радиуса-вектора точки на плоскость xOy $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$. Зависимость между прямоугольными и сферическими координатами дается формулами

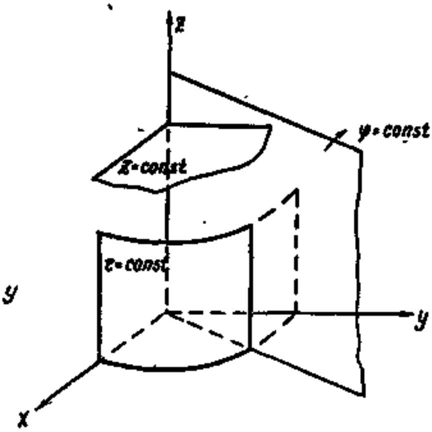
$$\begin{aligned} x &= \rho\sin\theta\cos\varphi; \\ y &= \rho\sin\theta\sin\varphi; \\ z &= \rho\cos\theta. \end{aligned} \tag{17,2}$$

Координатная поверхность. Координатной называется поверхность, на которой одна из координат точки остается постоянной. Координатными поверхностями в прямоугольной системе координат являются плоскости, параллельные координатным плоскостям xOy, xOz и yOz (фиг. 17,1). На каждой из этих плоскостей одна координата сохраняет постоянное значение.

Координатными поверхностями в *цилиндрической системе координат* являются: 1) плоскости, параллельные плоскости xOy, т. е. поверхности, на которых координата z остается постоянной; 2) поверхности прямых круговых цилиндров, общей осью которых является ось Oz; на этих поверхностях постоянное значение имеет



Фиг. 17,1



Фиг. 17,2

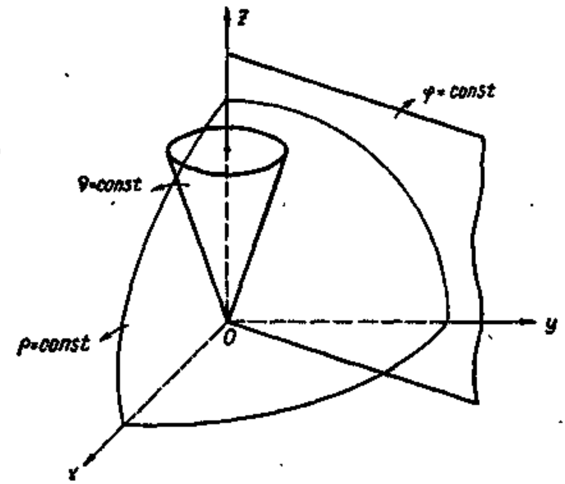
координата r; 3) полуплоскости, проходящие через ось Oz и ограниченные ею; на них координата φ сохраняет постоянное значение (фиг. 17,2).

Координатными поверхностями *в сферической системе координат* являются: 1) сферы с центром в начале координат; на них координата ρ сохраняет постоянное значение; 2) полуплоскости, проходящие через ось Oz и ограниченные ею; на этих кооодинатных поверхностях постоянное значение сохраняет координата φ и 3) круговые конусы, общей осью которых является ось Oz; на каждой из этих координатных поверхностей координата θ сохраняет постоянное значение (фиг. 17,3).

Координатные линии. Координатными называются такие линии, вдоль которых изменяется только одна координата, а две другие сохраняют постоянное значение. Каждые две координатные поверхности при пересечении образуют координатную линию.

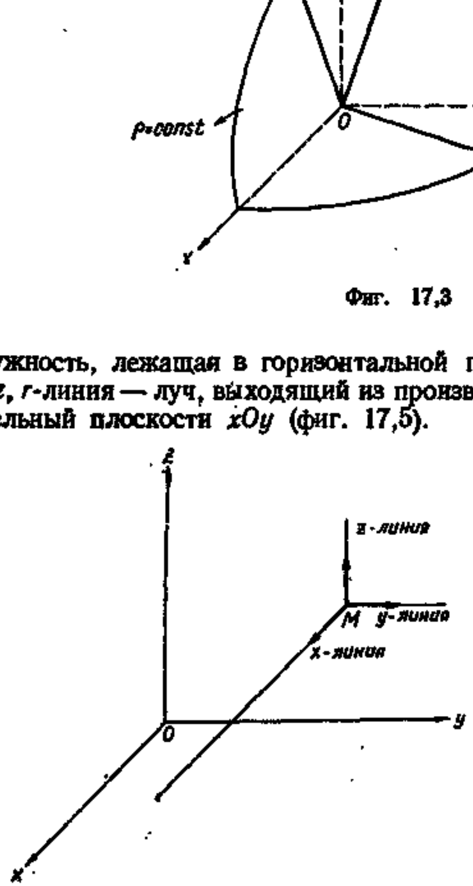
В прямоугольной системе координат такими линиями являются прямые, параллельные координатным осям. Например, координатная x-линия параллельна оси Ox (фиг. 17,4).

Координатными линиями в цилиндрической системе координат являются: z-линия — прямая, параллельная оси Oz, φ-линия — ок-

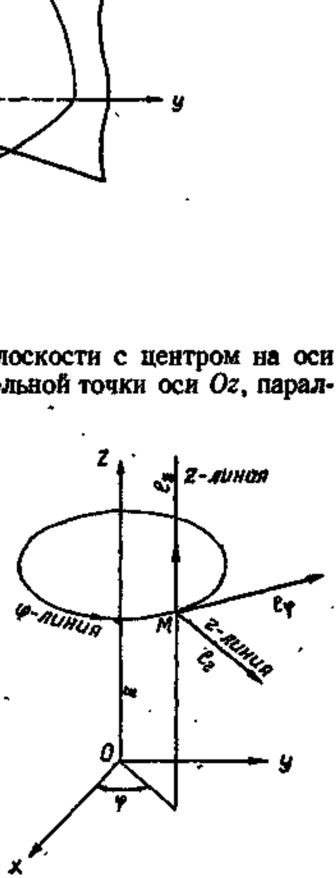


Фиг. 17,3

ружность, лежащая в горизонтальной плоскости с центром на оси Oz, r-линия — луч, выходящий из произвольной точки оси Oz, параллельный плоскости xOy (фиг. 17,5).



Фиг. 17,4



Фиг. 17,5

Координатными линиями в сферической системе координат являются: ρ-линия — луч, выходящий из начала координат, θ-линия — полуокружность с центром в начале координат, соединяющая две точки на оси Oz, и φ-линия — окружность с центром на оси Oz, лежащая в плоскости, параллельной плоскости xOy (фиг. 17,6).

Криволинейная ортогональная система координат. Криволинейная система координат называется ортогональной, если в любой точке касательные к координатным линиям, проходящим через эту точку, пересекаются под прямым углом. Например, цилиндрическая и сферическая системы координат являются ортогональными криволинейными системами координат. Кроме этих координатных систем, которые являются криволинейными ортогональными, существуют и другие.

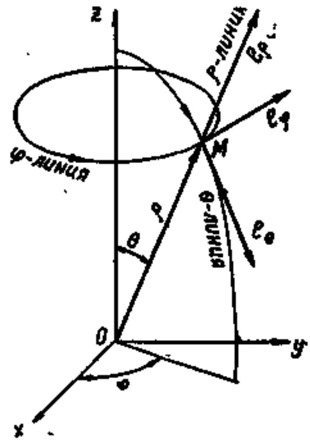
Рассмотрим в общем виде систему ортогональных криволинейных координат (фиг. 17,7).

Из формул (17,1) и (17,2) видно, что прямоугольные координаты x, y, и z точки являются в цилиндрической системе координат функциями r, φ и z, т. е.

$$
\begin{aligned}
x &= x(r,\ \varphi);\\
y &= y(r,\ \varphi);\\
z &= z,
\end{aligned}
\qquad \text{(A)}
$$

а в сферической системе координат x, y и z является функциями ρ, θ и φ, т. е.

$$
\begin{aligned}
x &= x(\rho,\ \theta,\ \varphi);\\
y &= y(\rho,\ \theta,\ \varphi);\\
z &= z(\rho,\ \theta).
\end{aligned}
\qquad \text{(B)}
$$



Фиг. 17,6

Пусть в общем случае в трехмерном пространстве кроме прямоугольной системы координат введена также криволинейная система координат (u, v, w) и между ними и прямоугольными координатами x, y и z установлено взаимно однозначное соответствие, которое описывается формулами, аналогичными формулам (А) и (В):

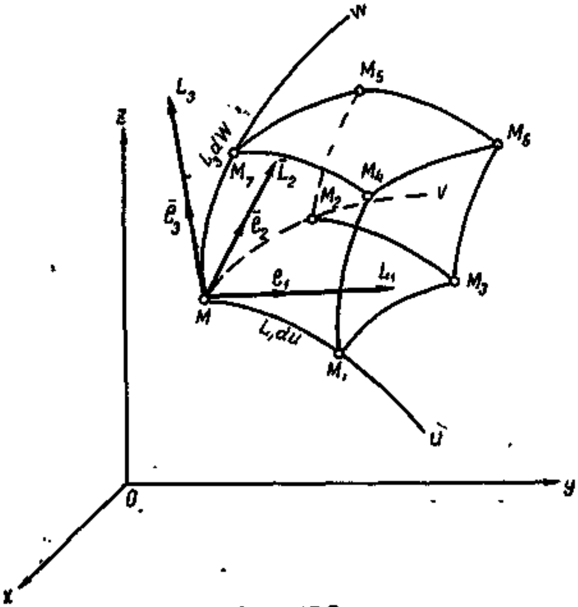
$$
\begin{aligned}
x &= x(u,\ v,\ w);\\
y &= y(u,\ v,\ w);\\
z &= z(u,\ v,\ w).
\end{aligned}
\qquad (17{,}3)
$$

Каждая пара координатных поверхностей, проходящих через фиксированную точку M, образует в пересечении координатную линию. В фиксированной точке M проведем касательные к координатным линиям Mu, Mv и Mw. Будем рассматривать только ортогональные системы криволинейных координат. Это означает, что векторы $\bar{L}_1$, $\bar{L}_2$, $\bar{L}_3$, лежащие на этих касательных, будут попарно перпендикулярны.

Выражения для элементов длины, площади объема в ортогональных криволинейных координатах

Элемент длины в ортогональных криволинейных координатах. Рассмотрим бесконечно малый криволинейный параллелепипед, вырезаемый тремя парами координатных поверхностей, соответствующими значениям координат u, v, w и $u+\Delta u$, $v+\Delta v$, $w+\Delta w$. Точка M имеет координаты u, v, $w: M(u, v, w)$. «Гранями» этого параллелепипеда являются координатные поверхности:

$$MM_1M_3M_2;\ MM_2M_5M_7;\ MM_1M_4M_7;$$
$$M_7M_4M_4M_6;\ M_1M_3M_6M_4;\ M_2M_3M_6M_5.$$



Фиг. 17,7

Его «ребрами» являются координатные линии, которые получаются в пересечении указанных «граней».

Квадрат элемента длины в прямоугольной системе координат

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{17,4}$$

Из формул (17,3) следует, что

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \frac{\partial x}{\partial w}dw; \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw; \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv + \frac{\partial z}{\partial w}dw. \end{aligned} \tag{17,5}$$

Возведем каждое из этих равенств в квадрат, почленно их сложим и подставим в (17,4). Тогда

$$ds^2=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]du^2+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]dv^2+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2\right]dw^2+2\left[\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right]du\,dv+2\left[\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial w}\right]du\,dw+$$
$$+2\left[\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial w}\right]dv\,dw.$$

Рассмотрим три вектора $\bar L_1$, $\bar L_2$, и $\bar L_3$, лежащие на касательных, проведенных из точки M к координатным линиям MM_1, MM_2 и MM_3 соответственно:

$$\begin{aligned}\bar L_1&=\frac{\partial x}{\partial u}\bar i+\frac{\partial y}{\partial u}\bar j+\frac{\partial z}{\partial u}\bar k;\\ \bar L_2&=\frac{\partial x}{\partial v}\bar i+\frac{\partial y}{\partial v}\bar j+\frac{\partial z}{\partial u}\bar k;\\ \bar L_3&=\frac{\partial x}{\partial w}\bar i+\frac{\partial y}{\partial w}\bar j+\frac{\partial z}{\partial w}\bar k,\end{aligned}\tag{17,6}$$

где $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ — проекции вектора $\bar L_1$, на оси Ox, Oy, Oz;

$\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ — проекции вектора $\bar L_2$ на те же оси;

$\frac{\partial x}{\partial w}$, $\frac{\partial y}{\partial w}$, $\frac{\partial z}{\partial w}$ — проекции вектора $\bar L_3$ на те же оси;

а $\bar i$, $\bar j$, и $\bar k$ — орты этих осей.

Так как векторы $\bar L_1$, $\bar L_2$, и $\bar L_3$ попарно перпендикулярны, то их скалярные произведения $\bar L_1\cdot\bar L_2$, $\bar L_2\cdot\bar L_3$ и $\bar L_1\cdot\bar L_3$ равны нулю. Но на основании (17,6)

$$\bar L_1\cdot\bar L_2=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}=0;$$
$$\bar L_1\cdot\bar L_3=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial w}=0;$$
$$\bar L_2\cdot\bar L_3=\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial w}=0,$$

поэтому в формуле для ds^2 три последние слагаемые равны нулю и тогда оказывается, что в случае ортогональных криволинейных координат квадрат элемента длины содержит только квадраты дифференциалов du^2, dv^2 и dw, а

$$ds^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right] du^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right] dv^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2\right] dw^2. \quad (17,7)$$

Выражения, стоящие здесь в квадратных скобках, есть квадраты длин векторов $\overline{L}_1$, $\overline{L}_2$ и $\overline{L}_3$, определенных формулами (17,6), т. е. эти выражения равны

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = L_1^2;\\
&\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = L_2^2;\\
&\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2 = L_3^2,
\end{aligned} \quad (17,8)$$

поэтому

$$ds^2 = L_1^2 du^2 + L_2^2 dv^2 + L_3^2 dw^2.$$

На основании формулы (17,8) длины «ребер» рассматриваемого бесконечно малого параллелепипеда следует принять равными:

$$\begin{aligned}
(ds)_u &= \overset{\frown}{MM_1} = L_1 du;\\
(ds)_v &= \overset{\frown}{MM_2} = L_2\, dv;\\
(ds)_w &= \overset{\frown}{MM_7} = L_3\, dw.
\end{aligned} \quad (17,9)$$

Эти формулы и выражают элементы длины в ортогональных криволинейных координатах.

Множители L_1, L_2, L_3, которые входят в эти формулы, есть длины векторов $\overline{L}_1$, $\overline{L}_2$ и $\overline{L}_3$, введенных формулами (17,6), равные

$$\begin{aligned}
L_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2};\\
L_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2};\\
L_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2}.
\end{aligned} \quad (17,10)$$

Величины L_1, L_2, L_3 называются коэффициентами Ляме, отвечающими точке с координатами u, v и w. От точки к точке коэффициенты Ляме будут изменяться, поэтому они являются функциями координат точки. Вследствие этого коэффициенты Ляме называют также единицами локальной (местной) длины.

Элемент площади в ортогональных криволинейных координатах. Так как рассматриваемая система криволинейных координат ортогональна, то площадь «грани» $MM_1M_3M_2$, которую с точностью до бесконечно малых высшего порядка будем считать прямоугольником,

$$(d\sigma)_{uv} = (ds)_u \cdot (ds)_v = (L_1 du) \cdot (L_2 dv);$$
$$(d\sigma)_{uv} = L_1 L_2 du\, dv. \qquad (17,11)$$

Аналогично площади двух других граней $MM_2M_6M_7$ и $MM_1M_4M_7$ равны соответственно

$$(d\sigma)_{vw} = (ds)_v \cdot (ds)_w = L_2 L_3 dv\, dw; \qquad (17,12)$$
$$(d\sigma)_{uw} = (ds)_u \cdot (ds)_w = L_1 L_3 du\, dw. \qquad (17,13)$$

Формулы (17,11), (17,12) и (17,13) и определяют элемент площади в ортогональных криволинейных координатах.

Элемент объема в ортогональных криволинейных координатах. Чтобы определить элемент объема в ортогональных криволинейных координатах, найдем объем рассматриваемого бесконечно малого криволинейного параллелепипеда. Считая с точностью до бесконечно малых высшего порядка этот параллелепипед прямоугольным, определим, что его объем

$$dv = (ds)_u \cdot (ds)_v \cdot (ds)_w;$$
$$dv = (L_1 du) \cdot (L_2 dv) \cdot (L_3 dw).$$

Окончательно элемент объема в ортогональных криволинейных координатах

$$dv = L_1 L_2 L_3 du\, dv\, dw. \qquad (17,14)$$

Выражение проекций вектора $\bar{A}$ на касательные к координатным линиям M_u, M_v, M_w, проведенным в точке M (x, y, z) через его проекции на оси прямоугольной системы координат.

Проекции вектора $\bar{A}$ на оси прямоугольной системы координат обозначим через A_x, A_y, A_z, а на касательные к линиям Mu, Mv и Mw — через A_u, A_v и A_w.

Тогда по известным формулам векторной алгебры имеем

$$A_u = A_x \cos(x, u) + A_y \cos(y, u) + A_z \cos(z, u);$$
$$A_v = A_x \cos(x, v) + A_y \cos(y, v) + A_z \cos(z, v); \qquad (17,15)$$
$$A_w = A_x \cos(x, w) + A_y \cos(y, w) + A_z \cos(z, w).$$

Входящие сюда девять косинусов легко определятся из формул (17,6). Косинус угла между вектором $\bar{a}$ и осью $\bar{L}$ равен проекции вектора на эту ось, разделенной на модуль вектора, т. е.

$$\cos(\bar{a}, \bar{L}) = \frac{a_L}{a}.$$

Так как косинус угла между касательной к линии Mu и осью Ox равен косинусу того угла, который вектор L_1 составляет с осью Ox, то, учитывая, что $L_{1x} = \frac{\partial x}{\partial u}$, имеем

$$\cos(x,\ u) = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{L_1} = \frac{1}{L_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}.$$

Аналогично получаем и значения остальных косинусов. Таким образом,

$$\cos(x,\ u) = \frac{1}{L_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial u};\ \cos(y,\ u) = \frac{1}{L_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial u};\ \cos(z,\ u) = \frac{1}{L_1} \cdot \frac{\partial z}{\partial u};$$
$$\cos(x,\ v) = \frac{1}{L_2} \cdot \frac{\partial x}{\partial v};\ \cos(y,\ v) = \frac{1}{L_2} \cdot \frac{\partial y}{\partial v};\ \cos(z,\ v) = \frac{1}{L_2} \cdot \frac{\partial z}{\partial v};$$
$$\cos(x,\ w) = \frac{1}{L_3} \cdot \frac{\partial x}{\partial w};\ \cos(y,\ w) = \frac{1}{L_3} \cdot \frac{\partial y}{\partial w};\ \cos(z,\ w) = \frac{1}{L_3} \cdot \frac{\partial z}{\partial w}.$$

В дальнейшем рассматриваются только ортогональные криволинейные координаты, которые для сокращения записей мы будем называть просто криволинейными, опуская слово «ортогональные».

Вывод формул для вычисления градиента, дивергенции, ротора и оператора Лапласа в криволинейных координатах

Задача 17,1. Найти коэффициенты Ляме L_1, L_2 и L_3 для цилиндрических координат.

Решение. В цилиндрических координатах криволинейные координаты u, v, w имеют значения $u = r$, $v = \varphi$, $w = z$, а по формулам (17,1)

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \quad z = z.$$

$$\begin{array}{l|l|l}
\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi; & \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi; & \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial r} = 0; \\
\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi; & \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi; & \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0; \\
\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{\partial x}{\partial z} = 0; & \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{\partial y}{\partial z} = 0; & \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1.
\end{array}$$

По формулам (17,10) получим

$$\begin{aligned}
&L_1 = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1; \\
&L_2 = \sqrt{(-r\sin\varphi)^2 + (r\cos\varphi)^2} = r; \qquad (17,16) \\
&L_3 = 1.
\end{aligned}$$

Итак, в цилиндрических координатах

$$L_1 = 1; \quad L_2 = r; \quad L_3 = 1. \qquad (17,17)$$

Задача 17,2. Найти коэффициенты Ляме для сферических координат.

Решение. В сферических координатах криволинейные координаты u, v и w имеют значения $u=\rho$; $v=\theta$; $w=\varphi$.
По формулам (17,2)

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi;$$
$$y=\rho\sin\theta\sin\varphi;$$
$$z=\rho\cos\theta;$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial \rho}=\cos\varphi\sin\theta; \quad \frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial \rho}=\sin\varphi\sin\theta; \quad \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial \rho}=\cos\theta;$$
$$\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial \theta}=\rho\cos\varphi\cos\theta; \quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial y}{\partial \theta}=\rho\sin\varphi\cos\theta; \quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial \theta}=-\rho\sin\theta;$$
$$\frac{\partial x}{\partial w}=\frac{\partial x}{\partial \varphi}=-\rho\sin\varphi\sin\theta; \quad \frac{\partial y}{\partial w}=\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\rho\cos\varphi\sin\theta; \quad \frac{\partial z}{\partial w}=\frac{\partial z}{\partial \varphi}=0.$$

$$L_1=\sqrt{(\cos\varphi\sin\theta)^2+(\sin\varphi\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2}=1;$$
$$L_2=\sqrt{(\rho\cos\varphi\cos\theta)^2+(\rho\sin\varphi\cos\theta)^2+(-\rho\sin\theta)^2}=\rho;$$
$$L_3=\sqrt{(-\rho\sin\varphi\sin\theta)^2+(\rho\cos\varphi\sin\theta)^2}=\rho\sin\theta.$$

Итак, в сферических координатах

$$L_1=1; \quad L_2=\rho; \quad L_3=\rho\sin\theta. \tag{17,18}$$

Задача 17,3. Определить градиент функции $V=V(x, y, z)$ в криволинейных координатах, причем

$$x=x(u, v, w); \quad y=y(u, v, w); \quad z=z(u, v, w).$$

Решение. Известно, что

$$\operatorname{grad} V=\frac{\partial V}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\bar{k}.$$

По формулам (17,15) проекция $\operatorname{grad}_u V$ на направление касательной в точке M к дуге MM_1 (фиг. 17,7) равна

$$\text{пр}_u \operatorname{grad} V=\text{пр}_x \operatorname{grad} V\cdot\cos(x, u)+\text{пр}_y \operatorname{grad} V\cdot\cos(y, u)+$$
$$+\text{пр}_z \operatorname{grad} V\cdot\cos(z, u). \tag{A}$$

Учитывая, что

$$\text{пр}_x \operatorname{grad} V=\frac{\partial V}{\partial x}; \quad \text{пр}_y \operatorname{grad}\frac{\partial V}{\partial y}; \quad \text{пр}_z \operatorname{grad} V=\frac{\partial V}{\partial z},$$

а на основании формул (17,16)

$$\cos(x, u)=\frac{1}{L_1}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}; \quad \cos(y, u)=\frac{1}{L_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}; \quad \cos(z, u)=\frac{1}{L_1}\cdot\frac{\partial z}{\partial u},$$

переписываем (A) в виде

$$\text{пр}_u \operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{1}{L_1}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{1}{L_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{1}{L_1}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}=$$

$$=\frac{1}{L_1}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right).$$

Выражение в скобках есть нечто иное, как производная по u от сложной функции $V(x, y, z)$, где

$$x = x(u, V, w);\ y = y(u, v, w);\ z = z(u, v, w),$$

т. е. $\frac{\partial V}{\partial u}$.

Поэтому

$$\text{пр}_u \operatorname{grad} V = \frac{1}{L_1}\cdot\frac{\partial V}{\partial u}. \tag{17,19}$$

Точно так же найдем проекции градиента функции V на касательные, проведенные в точке M к дугам MM_2 и MM_3:

$$\text{пр}_v \operatorname{grad} = \frac{1}{L_2}\frac{\partial V}{\partial v}; \tag{17,20}$$

$$\text{пр}_w \operatorname{grad} = \frac{1}{L_3}\frac{\partial V}{\partial w}. \tag{17,21}$$

Поэтому $\operatorname{grad} V$ в криволинейных координатах

$$\operatorname{grad} V = \frac{1}{L_1}\frac{\partial V}{\partial u}\bar{e}_u + \frac{1}{L_2}\frac{\partial V}{\partial v}\bar{e}_v + \frac{1}{L_3}\frac{\partial V}{\partial w}\bar{e}_w \tag{17,22}$$

где $\bar{e}_u$, $\bar{e}_v$, $\bar{e}_w$ — орты осей Ou, Ov и Ow соответственно.

Задача 17. Найти выражение дивергенции вектора $\bar{A}$ в криволинейных координатах.

Решение. Известно, что дивергенцией векторного поля вектора $\bar{A}$ в точке M называется предел, к которому стремится отношение потока этого вектора через замкнутую поверхность $\bar{S}$, окружающую точку M, к объему V области, ограниченной этой поверхностью, при условии, что объем V стягивается в точку M, т. е.

$$\operatorname{div}\bar{A} = \lim_{V\to M}\frac{\iint\limits_{(S)} A_n d\sigma}{V}. \tag{17,23}$$

Поэтому мы можем дивергенцию вектора $\bar{A}$ в точке M вычислить, применяя формулу (17,23) к элементарному объему в криволинейных координатах, т. е. применяя ее к нашему бесконечно малому криволинейному параллелепипеду. Вектор $\bar{A}$ в криволинейных координатах запишется через его проекции на касательные в точке M к координатным линиям так:

$$\bar{A} = A_u \bar{e}_u + A_v \bar{e}_v + A_w \bar{e}_w. \tag{17,24}$$

Вычислим поток вектора A через все шесть граней этого параллелепипеда.

Рассмотрим сначала две «грани», перпендикулярные к координатной линии MM_1 (напоминаем, что мы рассматриваем ортогональные криволинейные координаты), т. е. «грани» $MM_2M_5M_3$ и $M_1M_3M_6M_4$. Так как внешние нормали к этим граням имеют противоположные направления, то проекции вектора $\bar{A}$ на них будут отличаться только знаком. Единичные векторы этих нормалей будут $-\bar{e}_u$ на левой грани и $\bar{e}_u$ на правой, так как $\bar{e}_u$ направлен в сторону возрастающих значений координаты u. Из (17,24) следует, что проекция вектора $\bar{A}$ на нормаль к левой грани будет равна $-A_u$, а на нормаль правой грани эта проекция равна A_u.

Поток через «грань» $MM_2M_5M_3$ равен площади этой грани $d\sigma_1 = L_1L_2du\,dw$, умноженной на $-A_u$, т. е.

$$\Pi_{MM_2M_5M_3} = -A_uL_1L_2dv\,dw.$$

Поток через противоположную «грань» $M_1M_3M_6M_4$ от только что определенного отличается на величину частного дифференциала по переменной u от величины $A_uL_1L_2$, т. е. на величину

$$\frac{\partial}{\partial u}(A_uL_1L_2)\,du,$$

так как на этой грани криволинейная координата равна не u, а $u+du$, а две другие координаты v и w имеют то же значение, что и на левой «грани». Таким образом, поток вектора $\bar{A}$ через правую грань

$$\Pi_{M_1M_3M_6M_4} = \left[A_uL_1L_2 + \frac{\partial}{\partial u}(A_uL_1L_2)\,du\right]dv\,dw.$$

Складывая найденные потоки через две рассматриваемые грани, найдем, что поток через эти две грани равен

$$\left[A_uL_1L_2 + \frac{\partial}{\partial u}(A_uL_1L_2)\,du\right]dv\,dw + [-A_uL_1L_2dv\,dw] = \\ = \frac{\partial}{\partial u}(A_uL_1L_2)\,du\,dv\,dw.$$

Аналогично поток через две грани $MM_1M_4M_2$ и $M_3M_6M_5M_2$ равен

$$\frac{\partial}{\partial v}(A_vL_1L_3)\,du\,dv\,dw,$$

а через две грани $MM_1M_3M_2$ и $M_3M_4M_6M_5$

$$\frac{\partial}{\partial w}(A_wL_1L_2)\,du\,dv\,dw.$$

Поток через весь объем бесконечно малого криволинейного параллелепипеда равен сумме этих потоков, т. е.

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}(A_uL_2L_3)+\frac{\partial}{\partial v}(A_vL_1L_3)+\frac{\partial}{\partial w}(A_wL_2L_3)\right]du\,dv\,dw.$$

Разделив это выражение на объем параллелепипеда, равный на основании формулы (17,14) $L_1L_2L_3\,du\,dv\,dw$, найдем по (17,23), что в точке M

$$\operatorname{div}\bar{A}=\frac{1}{L_1L_2L_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}(A_uL_2L_3)+\frac{\partial}{\partial v}(A_vL_1L_3)+\frac{\partial}{\partial w}(A_wL_1L_2)\right]. \qquad (17,25)$$

Задача 17,5 (для самостоятельного решения). Найти: 1) $\operatorname{div}\bar{e}_u$; 2) $\operatorname{div}\bar{e}_v$ и 3) $\operatorname{div}\bar{e}_w$.

Ответ. 1) $\operatorname{div}\bar{e}_u=\frac{1}{L_1L_2L_3}\frac{\partial}{\partial u}(L_2L_3)$;

2) $\operatorname{div}\bar{e}_v=\frac{1}{L_1L_2L_3}\frac{\partial}{\partial v}(L_1L_3)$;

3) $\operatorname{div}\bar{e}_w=\frac{1}{L_1L_2L_3}\frac{\partial}{\partial w}(L_1L_2)$.

Задача 17,6. Найти выражение для вихря вектора $\bar{A}$ в ортогональных криволинейных координатах.

Решение. Положим в формуле (17,22) $V=u$. Так как частные производные от u по v и w равны нулю, потому что u не зависит от v и w, получим

$$\operatorname{grad}u=\frac{1}{L_1}\bar{e}_u. \qquad (17,26)$$

Вычислим вихрь от обеих частей этого равенства

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}u=\operatorname{rot}\left(\frac{1}{L_1}\bar{e}_u\right).$$

Но на основании (16,34) $\operatorname{rot}\operatorname{grad}u=0$, а потому

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{L_1}\bar{e}_u\right)=0. \qquad (17,27)$$

По формуле (16,11)

$$\operatorname{rot}f\bar{a}=\operatorname{grad}f\times\bar{a}+f\operatorname{rot}\bar{a}.$$

На основании этого и учитывая (17,27), получаем

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{L_1}\bar{e}_u\right)=\operatorname{grad}\left(\frac{1}{L_1}\right)\times\bar{e}_u+\frac{1}{L_1}\operatorname{rot}\bar{e}_u. \qquad (17,28)$$

Вычислим $\operatorname{grad}\left(\frac{1}{L_1}\right)$ по формуле (17,22)

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{L_1}\right)=\frac{1}{L_1}\frac{\partial\left(\frac{1}{L_1}\right)}{\partial u}\bar{e}_u+\frac{1}{L_2}\frac{\partial\left(\frac{1}{L_1}\right)}{\partial v}\bar{e}_v+\frac{1}{L_3}\frac{\partial\left(\frac{1}{L_1}\right)}{\partial w}\bar{e}_w.$$

Выполняем дифференцирование в каждом слагаемом:

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{L_1}\right)=-\frac{1}{L_1^2}\frac{1}{L_1}\frac{\partial L_1}{\partial u}\bar{e}_u-\frac{1}{L_1^2}\frac{1}{L_2}\frac{\partial L_1}{\partial v}\bar{e}_v-\frac{1}{L_1^2}\frac{1}{L_3}\frac{\partial L_1}{\partial w}\bar{e}_w.$$

Отсюда следует

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{L_1}\right)=-\frac{1}{L_1^2}\left(\frac{1}{L_1}\frac{\partial L_1}{\partial u}\bar{e}_u+\frac{1}{L_2}\frac{\partial L_1}{\partial v}\bar{e}_v+\frac{1}{L_3}\frac{\partial L_1}{\partial w}\bar{e}_w\right).$$

Выражение, стоящее в скобках правой части последнего равенства, на основании формулы (17,22) равно $\operatorname{grad} L_1$, поэтому окончательно

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{L_1}\right)=-\frac{1}{L_1^2}\operatorname{grad} L_1.$$

Тогда из (17,28) получаем

$$-\frac{1}{L_1^2}\operatorname{grad} L_1\times\bar{e}_u+\frac{1}{L_1}\operatorname{rot}\bar{e}_u=0;$$
$$\operatorname{rot}\bar{e}_u=\frac{1}{L_1}\operatorname{grad} L_1\times\bar{e}_u. \tag{17,29}$$

Вычислим теперь векторное произведение $\frac{1}{L_1}\operatorname{grad} L_1\times\bar{e}_u$:

$$\frac{1}{L_1}\operatorname{grad} L_1\times\bar{e}_u=\frac{1}{L_1}\begin{vmatrix}\bar{e}_u & \bar{e}_v & \bar{e}_w\\ (\operatorname{grad} L_1)_u & (\operatorname{grad} L_1)_v & (\operatorname{grad} L_1)_w\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}.$$

Заменяя элементы второй строки этого определителя по формулам (17.19), (17,20) и (17.21), получим

$$\frac{1}{L_1}\operatorname{grad} L_1\times\bar{e}_u=\frac{1}{L_1}\begin{vmatrix}\bar{e}_u & \bar{e}_v & \bar{e}_w\\ \frac{1}{L_1}\frac{\partial L_1}{\partial u} & \frac{1}{L_2}\frac{\partial L_1}{\partial v} & \frac{1}{L_3}\frac{\partial L_1}{\partial w}\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=$$
$$=\frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{L_3}\frac{\partial L_1}{\partial w}\bar{e}_v-\frac{1}{L_2}\frac{\partial L_1}{\partial v}\bar{e}_w\right),$$

а отсюда уже окончательно получаем из (17,29)

$$\operatorname{rot}\bar{e}_u=\frac{1}{L_1L_3}\frac{\partial L_1}{\partial w}\bar{e}_v-\frac{1}{L_1L_2}\frac{\partial L_1}{\partial v}\bar{e}_w.$$

Точно так же определим

$$\operatorname{rot}\bar e_v = \frac{1}{L_3L_1}\frac{\partial L_2}{\partial u}\bar e_w - \frac{1}{L_2L_3}\frac{\partial L_2}{\partial w}\bar e_u;$$

$$\operatorname{rot}\bar e_w = \frac{1}{L_2L_3}\frac{\partial L_3}{\partial v}\bar e_u - \frac{1}{L_3L_1}\frac{\partial L_3}{\partial u}\bar e_v.$$

После того как найдены вихри единичных векторов $\bar e_u$, $\bar e_v$ и $\bar e_w$, можно определить и вихрь вектора $\bar A$

$$\bar A = A_u\bar e_u + A_v\bar e_v + A_w\bar e_w,$$

где A_u, A_v, A_w — проекции векторов $\bar A$ по осям u, v и w.

$$\operatorname{rot}\bar A = \operatorname{rot}(A_u\bar e_u) + \operatorname{rot}(A_v\bar e_v) + \operatorname{rot}(A_w\bar e_w)$$

Пользуясь тем, что на основании (16,11)

$$\operatorname{rot} f\bar a = \operatorname{grad} f \times \bar a + f\operatorname{rot}\bar a,$$

получим

$$\operatorname{rot}\bar A = \operatorname{grad} A_u \times \bar e_u + \operatorname{grad} A_v \times \bar e_v + \operatorname{grad} A_w \times \bar e_w +$$
$$+ A_u\operatorname{rot}\bar e_u + A_v\operatorname{rot}\bar e_v + A_w\operatorname{rot}\bar e_w =$$
$$= \begin{vmatrix} \bar e_u & \bar e_v & \bar e_w \\ \frac{1}{L_1}\frac{\partial A_u}{\partial u} & \frac{1}{L_2}\frac{\partial A_u}{\partial v} & \frac{1}{L_3}\frac{\partial A_u}{\partial w} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar e_u & \bar e_v & \bar e_w \\ \frac{1}{L_1}\frac{\partial A_v}{\partial u} & \frac{1}{L_2}\frac{\partial A_v}{\partial v} & \frac{1}{L_3}\frac{\partial A_v}{\partial u} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} +$$
$$+ \begin{vmatrix} \bar e_u & \bar e_v & \bar e_w \\ \frac{1}{L_1}\frac{\partial A_w}{\partial u} & \frac{1}{L_2}\frac{\partial A_w}{\partial v} & \frac{1}{L_3}\frac{\partial A_w}{\partial w} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + A_u\left(\frac{1}{L_1L_3}\frac{\partial L_1}{\partial w}\bar e_v - \frac{1}{L_1L_2}\frac{\partial L_1}{\partial u}\bar e_w\right) +$$
$$+ A_v\left(\frac{1}{L_2L_1}\frac{\partial L_2}{\partial u}\bar e_w - \frac{1}{L_2L_3}\frac{\partial L_2}{\partial w}\bar e_u\right) + A_w\left(\frac{1}{L_3L_2}\frac{\partial L_3}{\partial v}\bar e_u -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{L_3L_1}\frac{\partial L_3}{\partial u}\bar e_v\right) = \left(\frac{1}{L_3}\frac{\partial A_u}{\partial w}\bar e_v - \frac{1}{L_2}\frac{\partial A_u}{\partial v}\bar e_w\right) + \left(\frac{1}{L_1}\frac{\partial A_v}{\partial w}\bar e_w -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{L_3}\frac{\partial A_v}{\partial w}\bar e_u\right) + \left(\frac{1}{L_2}\frac{\partial A_w}{\partial v}\bar e_u - \frac{1}{L_1}\frac{\partial A_w}{\partial u}\bar e_v\right) +$$
$$+ A_u\left(\frac{1}{L_1L_3}\frac{\partial L_1}{\partial w}\bar e_v - \frac{1}{L_1L_2}\frac{\partial L_1}{\partial v}\bar e_w\right) + A_v\left(\frac{1}{L_2L_1}\frac{\partial L_2}{\partial u}\bar e_w -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{L_2L_3}\frac{\partial L_2}{\partial w}\bar e_u\right) + A_w\left(\frac{1}{L_3L_2}\frac{\partial L_3}{\partial v}\bar e_u - \frac{1}{L_3L_1}\frac{\partial L_3}{\partial u}\bar e_v\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{L_2}\frac{\partial A_w}{\partial v} - \frac{1}{L_3}\frac{\partial A_v}{\partial w} + \frac{1}{L_3L_2}A_w\frac{\partial L_3}{\partial v} - \frac{1}{L_2L_3}A_v\frac{\partial L_2}{\partial w}\right)\bar e_u +$$
$$+ \left(\frac{1}{L_3}\frac{\partial A_u}{\partial w} - \frac{1}{L_1}\frac{\partial A_w}{\partial u} + \frac{1}{L_1L_3}A_u\frac{\partial L_1}{\partial w} - \frac{1}{L_3L_1}A_w\frac{\partial L_3}{\partial u}\right)\bar e_v +$$

$$+\left(\frac{1}{L_1}\frac{\partial A_v}{\partial u}-\frac{1}{L_2}\frac{\partial A_u}{\partial v}+\frac{1}{L_2L_1}A_v\frac{\partial L_2}{\partial u}-\frac{1}{L_1L_2}A_u\frac{\partial L_1}{\partial v}\right)\bar{e}_w=$$

$$=\frac{1}{L_2L_3}\left[\left(L_3\frac{\partial A_w}{\partial v}+A_w\frac{\partial L_3}{\partial v}\right)-\left(L_2\frac{\partial A_v}{\partial w}+A_v\frac{\partial L_2}{\partial w}\right)\right]\bar{e}_u+$$

$$+\frac{1}{L_1L_3}\left[\left(L_1\frac{\partial A_u}{\partial w}+A_u\frac{\partial L_1}{\partial w}\right)-\left(L_3\frac{\partial A_w}{\partial u}+A_w\frac{\partial L_3}{\partial u}\right)\right]\bar{e}_v+$$

$$+\frac{1}{L_2L_1}\left[\left(L_2\frac{\partial A_v}{\partial u}+A_v\frac{\partial L_2}{\partial u}\right)-\left(L_1\frac{\partial A_u}{\partial v}+A_u\frac{\partial L_1}{\partial v}\right)\right]\bar{e}_w=$$

$$=\frac{1}{L_3L_2}\left[\frac{\partial(A_wL_3)}{\partial v}-\frac{\partial(A_vL_2)}{\partial w}\right]\bar{e}_u+\frac{1}{L_1L_3}\left[\frac{\partial(A_uL_1)}{\partial w}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial(A_wL_3)}{\partial u}\right]\bar{e}_v+\frac{1}{L_2L_1}\left[\frac{\partial(A_vL_2)}{\partial u}-\frac{\partial(A_uL_1)}{\partial v}\right]\bar{e}_w.$$

И окончательно для вихря вектора $\bar{A}$ в криволинейных ортогональных координатах

$$\operatorname{rot}\bar{A}=\frac{1}{L_2L_3}\left[\frac{\partial(A_wL_3)}{\partial v}-\frac{\partial(A_vL_2)}{\partial w}\right]\bar{e}_u+\frac{1}{L_1L_3}\left[\frac{\partial(A_uL_1)}{\partial w}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial(A_wL_3)}{\partial u}\right]\bar{e}_v+\frac{1}{L_1L_2}\left[\frac{\partial(A_vL_2)}{\partial u}-\frac{\partial(A_uL_1)}{\partial v}\right]\bar{e}_w. \qquad (17,30)$$

Задача (17,7). Найти выражение оператора Лапласа ΔV в ортогональных криволинейных координатах.

Решение. Из формулы (16,32) известно, что

$$\Delta V=\operatorname{div}\operatorname{grad}V.$$

Проекции $\operatorname{grad}V$ вычисляются по формулам (17,19), (17,20), (17,21)

$$\operatorname{grad}_u V=\frac{1}{L_1}\cdot\frac{\partial V}{\partial u};$$
$$\operatorname{grad}_v V=\frac{1}{L_2}\cdot\frac{\partial V}{\partial v};$$
$$\operatorname{grad}_w V=\frac{1}{L_3}\cdot\frac{\partial V}{\partial w}.$$

Заменяем в формуле (17,25) проекции вектора A проекциями $\operatorname{grad}V$

$$\Delta V=\operatorname{div}\operatorname{grad}V=\frac{1}{L_1L_2L_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{L_2L_3}{L_1}\cdot\frac{\partial V}{\partial u}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L_1L_3}{L_2}\frac{\partial V}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{L_1L_2}{L_3}\frac{\partial V}{\partial w}\right)\right].$$

Значит, в ортогональных криволинейных координатах оператор Лапласа

$$\Delta V=\frac{1}{L_1L_2L_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{L_2L_3}{L_1}\frac{\partial V}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L_1L_3}{L_2}\frac{\partial V}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{L_1L_2}{L_3}\frac{\partial V}{\partial w}\right)\right]. \qquad (17,31)$$

Определение градиента, дивергенции, ротора и оператора Лапласа в цилиндрических и сферических координатах

Задача 17,8. Найти выражение градиента, дивергенции, ротора и оператора Лапласа в цилиндрических координатах.

Решение. Из задач (17,1) и (17,2) известны значения коэффициентов Ляме в цилиндрических и сферических координатах.

В цилиндрических координатах

$$u = r;\ v = \varphi;\ w = z;$$
$$L_1 = 1;\ L_2 = r;\ L_3 = 1. \tag{17,32}$$

1. Внося эти значения и в формулу (17,22), получим выражение градиента в цилиндрических координатах

$$\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial r} \bar{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \bar{e}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} \bar{e}_z.$$

2. Из формулы (17,25)

$$\operatorname{div} \bar{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(A_r r) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(A_\varphi) + \frac{\partial (A_z r)}{\partial z}\right].$$

Окончательно

$$\operatorname{div} \bar{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{A_r}{r}.$$

3. Внося значения (17,32) в формулу (17,30), находим выражение ротора в цилиндрических координатах

$$\operatorname{rot} \bar{A} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial (A_\varphi r)}{\partial z}\right)\bar{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\bar{e}_\varphi +$$
$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (A_\varphi r)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\bar{e}_z.$$

Выполняя дифференцирование, получаем окончательно в цилиндрических координатах

$$\operatorname{rot} \bar{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\bar{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\bar{e}_\varphi +$$
$$+ \left(\frac{1}{r}A_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\bar{e}_z.$$

4. Выражение оператора Лапласа в цилиндрических координатах находим, внося значения (17,32) в формулу (17,31)

$$\Delta V = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right].$$

Выполняем дифференцирование:

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2};$$

оператор Лапласа в цилиндрических координатах

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

В полярных координатах на плоскости выражение оператора Лапласа получим, опуская в нем последнее слагаемое, так как в этом случае функция V зависит только от r и φ. Таким образом, в полярных координатах оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Задача 17,9 (для самостоятельного решения). Определить градиент, дивергенцию, ротор и оператор Лапласа в сферических координатах.

Указание. Воспользоваться результатами задачи (17,2), в которой было найдено

$$L_1 = 1;\ L_2 = \rho;\ L_3 = \rho\sin\theta;\ u = \rho;\ v = \theta;\ w = \varphi.$$

Ответ.

$$1)\ \operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}\bar{e}_\theta + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{dV}{d\varphi}\bar{e}_\varphi.$$

$$2)\ \operatorname{div}\bar{A} = \frac{2}{\rho}A_\rho + \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho\,\mathrm{tg}\,\theta}A_\theta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi};$$

$$3)\ \operatorname{rot}_\rho\bar{A} = \frac{1}{\rho\,\mathrm{tg}\,\theta}A_\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi};$$

$$\operatorname{rot}_\theta\bar{A} = \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho}A_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho};$$

$$\operatorname{rot}_\varphi\bar{A} = \frac{1}{\rho}A_\theta + \frac{\partial A_\theta}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \theta};$$

$$4)\ \Delta V = \frac{2}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2\,\mathrm{tg}\,\theta}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

Содержание. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Чтобы выяснить происхождение линейных уравнений с частными производными первого порядка, прежде всего найдем уравнения поверхностей цилиндрических, конических и поверхностей вращения, а потом покажем, что найденные уравнения эквивалентны некоторым уравнениям с частными производными первого порядка.

1. Цилиндрические поверхности.

Найдем уравнение цилиндрической поверхности в том случае, когда образующая не параллельна ни одной из координатных осей, а ее направляющей является линия, определяемая уравнениями

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z) = 0; \\ F_1(x, y, z) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{18,1}$$

причем вовсе не обязательно, чтобы эта линия лежала в одной из координатных плоскостей.

Цилиндрическая поверхность, или цилиндр, — поверхность, описываемая прямой, которая движется, оставаясь параллельной данной прямой, пересекая при этом данную кривую, называемую направляющей.

Уравнение образующей, если предположить, что она пересекает плоскость xOy и проходит через точку $(a, b, 0)$, имеет вид

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-0}{p}, \tag{18,2}$$

где a и b — переменные параметры, а m, n и p — постоянные величины, так как по определению образующая сохраняет постоянное направление в пространстве.

Из (18,2)

$$\frac{x-a}{m} = \frac{z}{p}; \quad \frac{y-b}{n} = \frac{z}{p}.$$

Из этого следует, что уравнение образующей может быть записано в виде

$$\begin{aligned} x = kz + a; \\ y = lz + b, \end{aligned} \tag{18,3}$$

где

$$k = \frac{m}{p}; \quad l = \frac{n}{p}.$$

Так как прямая (18,2) пересекает направляющую (18,1), то, подставляя в (18,1) значения x и y из (18,3), получаем

$$\left.\begin{aligned} F(kz + a,\ lz + b,\ z) = 0; \\ F_1(kz + a,\ lz + b,\ z) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (18,3_1)$$

Если из этой системы исключить z, то получится соотношение вида

$$\varphi(a,\ b) = 0, \qquad (18,4)$$

которое связывает переменные a и b.

Из системы (18,3) следует, что

$$a = x - kz;$$
$$b = y - lz$$

и потому соотношение (18,4) перепишется в виде

$$\varphi(x - kz,\ y - lz) = 0. \qquad (18,5)$$

Этому уравнению будут удовлетворять координаты любой точки образующей цилиндрической поверхности.

Замечание. Если образующая не пересекает плоскость xOy (т. е. параллельна ей), то вместо точки $(a,\ b,\ 0)$ надо взять точку пересечения ее с другой координатной плоскостью.

Пример. Найти уравнение цилиндрической поверхности, для которой направляющей служит окружность

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 = 25; \\ z = 4, \end{aligned}\right\}$$

а направление образующей дано отношениями $m : n : p = 2 : 3 : 1$.

Решение. Выполним решение рассмотренным способом.

1. Уравнение образующей запишется в виде

$$\frac{x-a}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z-0}{1}.$$

2. Выразим x и y из этого уравнения через z

$$\frac{x-a}{2} = z; \quad \frac{y-b}{3} = z, \qquad (A)$$

откуда

$$x = 2z + a; \quad y = 3z + b.$$

3. Эти значения x и y подставим в уравнение направляющей и получим уравнения вида

$$\left.\begin{aligned} (2z + a)^2 + (3z + b)^2 = 25; \\ z = 4. \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

4. Теперь из этой системы уравнений исключим z и будем иметь соотношение вида (18,4), связывающее a и b.

В первое уравнение системы (B) подставим из второго $z = 4$.

$$(8 + a)^2 + (12 + b)^2 = 25. \tag{C}$$

5. Из (A) определим a и b

$$a = x - 2z; \; b = y - 3z.$$

Подставляя эти значения в (C), получим уравнение искомой поверхности в виде

$$(8 + x - 2z)^2 + (12 + y - 3z)^2 = 25$$

или, раскрывая скобки, найдем

$$x^2 + y^2 + 13z^2 - 4xz - 6yz + 16x + 24y - 88z + 183 = 0.$$

2. Конические поверхности.

Конической поверхностью, или конусом, называется поверхность, описываемая непрерывным движением прямой (образующей), которая проходит через неподвижную точку $A(a, b, c)$ — вершину конуса и пересекает данную линию (направляющую).

Пусть точка $A(a, b, c)$ — вершина конуса, а уравнения направляющей

$$\left.\begin{aligned} F\,(x, \; y, \; z) &= 0; \\ F_1(x, \; y, \; z) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

Уравнения образующей конуса, как уравнения прямой, проходящей через точку $A(a, b, c)$, запишутся в виде

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}. \tag{B}$$

Переменные параметры m, n и p в этих уравнениях связаны требованием, чтобы образующая пересекала направляющую. Уравнения (B) решим относительно x и y:

$$x = k(z - c) + a; \; y = l(z - c) + b, \tag{C}$$

где

$$k = \frac{m}{p}; \; l = \frac{n}{p}.$$

Так как образующая конической поверхности пересекает направляющую, то эти значения x и y должны удовлетворять уравнениям (A). Подставляя эти значения x и y в каждое из уравнений направляющей (A), мы получим систему двух уравнений, из которых можно исключить переменную z. В результате будет уравнение вида

$$f(k,\ l) = 0, \tag{D}$$

связывающее переменные параметры k и l.

Из уравнений (C) следует

$$k = \frac{x-a}{z-c};\ l = \frac{y-b}{z-c}.$$

Заменяя в уравнении (D) k и l этими их значениями, получим уравнение вида

$$f\left(\frac{x-a}{x-c},\ \frac{y-b}{z-c}\right) = 0, \tag{18,6}$$

которому будут удовлетворять координаты любой точки образующей во все время ее движения; таким образом, уравнение (18,6) и будет уравнением конической поверхности.

Решим задачу, связанную с определением уравнения конической поверхности.

Пример. Найти уравнение конуса с вершиной в начале координат и направляющей

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \\ z = c \end{aligned}\right\}$$

(эллипс, лежащий в плоскости $z = c$).

Решение. Выполним решение в соответствии с указанным способом. Образующая, как прямая, проходящая через начало координат, будет иметь уравнения

$$\frac{x-0}{m} = \frac{y-0}{n} = \frac{z-0}{p}$$

или

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}.$$

Определим из последних уравнений x и y через z

$$x = kz;\ y = lz \quad \left(k = \frac{m}{p};\ l = \frac{n}{p}\right) \tag{E}$$

и, подставив эти значения в уравнения направляющей, получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{k^2z^2}{a^2} + \frac{l^2z^2}{b^2} = 1; \\ z = c. \end{aligned}\right\}$$

Теперь из этих двух уравнений исключим z. Этого легко достичь, подставляя в первое уравнение системы $z = c$. Получаем уравнение

$$k^2\frac{c^2}{a^2} + l^2\frac{c^2}{b^2} = 1,$$

т. е. уравнение вида (18, 6). Из соотношений (E) следует

$$k=\frac{x}{z};\ l=\frac{y}{z}.$$

Подставляем эти значения k и l в последнее уравнение:

$$\frac{x^2}{z^2}\cdot\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{z^2}\cdot\frac{c^2}{b^2}=1.$$

Преобразуем его к более удобному виду. Обе части уравнения умножим на $\frac{z^2}{c^2}$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Полученное уравнение есть уравнение конуса. Заметим, что оно не содержит свободного члена, а все текущие координаты входят в одной и той же степени — второй.

3. Уравнение поверхностей вращения.

Эти поверхности образуются при вращении кривой AB, называемой образующей, около неподвижной прямой OR.

Поместим начало координат на неподвижной прямой OR, называемой осью вращения. Каждая точка M образующей AB описывает окружность, центр которой находится на OR, а плоскость, в которой она лежит, перпендикулярна OR: образованную так поверхность можно рассматривать как геометрическое место этих окружностей.

Пусть

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \tag{A}$$

будут уравнения оси OR. Тогда уравнение плоскости, перпендикулярной к ней,

$$ax+by+cz=\alpha.$$

Поэтому уравнения переменного круга

$$ax+by+cz=\alpha;\qquad x^2+y^2+z^2=\beta, \tag{B}$$

так как круг можно рассматривать как пересечение плоскости, перпендикулярной к OR, со сферой, имеющей центр в точке O.

Для того чтобы выразить, что этот круг пересекает кривую AB, нужно исключить x, y и z из уравнений (B) и уравнений кривой AB, а это приводит к соотношению

$$\varphi(\alpha,\ \beta)=0,$$

откуда

$$\alpha = \Phi(\beta). \tag{C}$$

Уравнение поверхности вращения получим, исключив α и β из (B) и (C), заменив в (C) α на $ax + by + cz$, а β — на $x^2 + y^2 + z^2$

$$ax + by + cz = \Phi(x^2 + y^2 + z^2). \tag{18,7}$$

Это и есть общее уравнение поверхностей вращения вокруг прямой $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ при произвольной функции Φ.

Найдем те дифференциальные уравнения с частными производными, которые эквивалентны полученным уравнениям цилиндрической и конической поверхностей и поверхности вращения.

Введем обозначения

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q.$$

а) Из уравнения (18,5) цилиндрической поверхности следует

$$y - bz = \Phi(x - az). \tag{18,8}$$

Это уравнение определяет при произвольной функции Φ цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны данной прямой (18,2), какова бы ни была направляющая.

Продифференцируем обе части (18,8) сначала по x, а потом по y и получим с учетом введенных обозначений

$$-bp = \Phi'(x - az) \cdot (1 - ap);$$

$$1 - bq = \Phi'(x - az) \cdot (-aq).$$

Исключая из этих уравнений Φ', найдем

$$ap + bq = 1 \tag{18,9}$$

(или $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$).

Это уравнение уже не содержит произвольной функции и имеет такую же степень общности, как и уравнение (18,8). Оно является дифференциальным уравнением в частных производных цилиндрических поверхностей.

б) Теперь обратимся к определению дифференциального уравнения *конических поверхностей*. Из (18,6) следует, что

$$\frac{y - b}{z - c} = \Phi\left(\frac{x - a}{z - c}\right). \tag{18,10}$$

Это уравнение при произвольной функции Φ определяет коническую поверхность с вершиной в точке (a, b, c). Продифференцируем обе части этого уравнения по x и по y, рассматривая z как функцию независимых переменных x и y. Получаем при дифференцировании по x

$$-\frac{y-b}{(z-c)^2}\cdot p=\Phi'\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\cdot\frac{z-c-p(x-a)}{(z-c)^2}.$$

При дифференцировании по y

$$\frac{z-c-q(y-b)}{(z-c)^2}=-\Phi'\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\cdot\frac{(x-a)q}{(z-c)^2}.$$

Исключаем из этих двух соотношений Φ':

$$(x-a)p+(y-b)q=z-c, \tag{18,11}$$

иначе: $(x-a)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial z}{\partial y}=z-c.$

Это уравнение не содержит произвольных функций. Оно является дифференциальным уравнением конических поверхностей.

в) Нам следует теперь определить дифференциальное уравнение поверхностей вращения. Дифференцируя обе части уравнения (18,7) сначала по x, а потом по y, получим

$$a+cp=\Phi'(x^2+y^2+z^2)\cdot(2x+2zp);$$
$$b+cq=\Phi'(x^2+y^2+z^2)\cdot(2y+2zq).$$

Исключаем из этих двух уравнений Φ':

$$(cy-bz)p+(az-cx)q=bx-ay, \tag{18,12}$$

иначе: $(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$

Уравнение (18,12) и есть уравнение с частными производными поверхностей вращения. Выпишем полученные уравнения:

уравнение цилиндрических поверхностей

$$ap+bq=1;$$

уравнение конических поверхностей

$$(x-a)p+(y-b)q=z-c;$$

уравнение поверхностей вращения

$$(cy-bz)p+(az-cx)q=bx-ay.$$

ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Линейное однородное уравнение с частными производными первого порядка имеет такой вид:

$$X_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+X_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=0. \tag{18,13}$$

Здесь z — искомая функция от n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — коэффициенты, которые являются функциями тех же n независимых переменных, причем ни в один из коэффициентов искомая функция не входит.

Задачу интегрирования этого уравнения сводят к задаче интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Уравнение (18,13) заменяют такой системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}. \tag{18,14}$$

Если проинтегрировать эту систему уравнений, то получим ее $(n-1)$ решений, которые содержат $(n-1)$ различных произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$. Разрешив эти решения относительно произвольных постоянных, найдем выражения вида

$$\begin{aligned} &u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1; \\ &u_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_2; \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &u_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_{n-1}, \end{aligned} \tag{18,15}$$

где функции $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ есть известные функции независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем все эти функции различны и соотношения между ними не существует.

Укажем следующие теоремы:

Теорема 1. Всякий интеграл системы (18,14) есть интеграл уравнения (18,13) и наоборот: всякий интеграл уравнения (18,13) есть интеграл системы (18,14).

Теорема 2. Уравнение (18,13) или система (18,14) допускают $n-1$ различных интегралов $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, все остальные интегралы заключены в формуле

$$u_n = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

где φ — произвольная функция.

На основании этих теорем заключают, что всякое выражение вида

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

какова бы ни была функция φ, будет интегралом системы (18,14), а потому и уравнения (18,13).

Общий интеграл уравнения (18,13) имеет вид

$$z = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n). \tag{18,16}$$

Из всего этого следует такое правило интегрирования линейного однородного уравнения первого порядка с частными производными:

Правило. Чтобы проинтегрировать уравнение (18,13), надо составить систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида (18,14) и проинтегрировать ее. Полученные $n-1$ соотношения разрешить относительно произвольных постоянных. Полученные функции $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ будут интегралами уравнения (18,13), а его общий интеграл следует записать в виде (18,16)

$$z = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

где φ — произвольная функция.

Подчеркнем, что общие решения обыкновенных дифференциальных уравнений содержат произвольные постоянные, а общие решения дифференциальных уравнений с частными производными — произвольные функции.

Примечание. Это правило сохраняется и тогда, когда коэффициенты X_i в уравнении (18,13) содержат, кроме независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, также и искомую функцию z.

К решению (18,16) следует присоединить и самоочевидное (тривиальное) решение уравнения (18,13)

$$z = C_n. \tag{18,17}$$

Задача Коши. Эту задачу для уравнения (18,13) рассмотрим только для того случая, когда искомая функция z является функцией двух независимых переменных, которые обозначим через x и y. Уравнение (18,13) запишется в виде

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x} + X_2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \tag{18,13'}$$

а система (18,14) запишется в виде одного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{X_1} = \frac{dy}{X_2}. \tag{18,14'}$$

Разрешая его интеграл относительно произвольной постоянной, получим

$$u_1(x, y) = C_1, \tag{18,15'}$$

а общий интеграл уравнения (18,13') запишется так:

$$z = \varphi(u_1), \tag{18,16'}$$

К этому общему интегралу следует присоединить и самоочевидное решение (18,17)

$$z = C_2. \tag{18,17'}$$

Общий интеграл (18,16') уравнения (18,13') определяет семейство поверхностей, которые называются интегральными поверхностями этого уравнения.

Задача Коши состоит в том, что требуется найти в этом семействе такую поверхность, которая проходит через заданную кривую, определяемую уравнениями

$$\left.\begin{aligned} f(x,\ y,\ z) &= 0, \\ f_1(x,\ y,\ z) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{18,18}$$

Для того чтобы эту поверхность найти, поступают так: из уравнений (18,15'); (18,17') и (18,18) исключают x, y и z и получают уравнение, связывающее C_1 и C_2; после этого C_1 заменяют на u_1, а C_2 на z. Полученное уравнение и определит ту интегральную поверхность из семейства (18,16'), которая проходит через кривую (18,18).

Выделенную таким путём из общего интеграла (18,16') интегральную поверхность будем называть частным решением уравнения (18,13').

Задача 18,1. Найти общий интеграл уравнения

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

и его частные решения, предполагая, что определяемая этим уравнением поверхность проходит через:

1) окружность $y^2 + z^2 = R^2$; $x = 0$; (A)

2) эллипс $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $x = 0$; (B)

3) гиперболу $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; $x = 0$; (C)

4) параболу $y^2 = 2pz$; $x = 0$. (D)

Решение. Заданное уравнение есть линейное однородное уравнение с частными производными первого порядка.

Составляем уравнение (18,14')

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}.$$

Интегрируя его, получим

$$x^2 + y^2 = C_1. \tag{E}$$

Присоединяем к этому решению самоочевидное решение (18,17')

$$z = C_2. \tag{F}$$

Общий интеграл в виде (18,16') запишется так:

$$z = \varphi(x^2 + y^2).$$

Это уравнение определяет поверхности вращения — см. формулу (18,7).

Теперь найдем частные решения.

1. Исключив x, y и z из уравнений (A), (E) и (F), получим уравнение, связывающее C_1 и C_2:

$$C_1 + C_2^2 = R^2.$$

Заменяя C_1 и C_2 их значениями из (E) и (F), получим

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Таким образом, искомой поверхностью является сфера.

2. Исключив x, y и z из уравнений (B), (E) и (F), найдем уравнение, связывающее C_1 и C_2:

$$\frac{C_1}{b^2}+\frac{C_2^2}{c^2}=1.$$

Заменяем C_1 и C_2 их значениями из (E) и (F)

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

т. е. эллипсоид вращения. Поступаем так же в третьем и четвертом случаях: в третьем случае

$$\frac{C_1}{b^2}-\frac{C_2^2}{c^2}=1,$$

отсюда

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

т. е. искомой поверхностью является двухполостный гиперболоид вращения. В четвертом случае искомой поверхностью является параболоид вращения

$$2pz=x^2+y^2.$$

Задача 18,2. Найти общий интеграл уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

и его частные решения, предполагая, что определяемая им поверхность проходит через такие линии:

1) окружность $y^2+z^2=R^2$; $x=a$; (A)

2) эллипс $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; $x=a$; (B)

3) гиперболу $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$; $x=a$; (C)

4) параболу $y^2=2pz$; $x=a$. (D)

Решение. Предложенное уравнение — также линейное однородное уравнение с частными производными первого порядка. На основании (18,14′) ему соответствует уравнение

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}.$$

Интегрируем его:

$$\ln x=\ln y-\ln C_1,\ \text{или}\ x=\frac{y}{C_1},$$

откуда, разрешая последнее равенство относительно C_1, имеем

$$\frac{y}{x} = C_1. \tag{E}$$

Присоединяем к этому интегралу самоочевидное решение

$$z = C_2, \tag{F}$$

и получаем общее решение в виде (18,16')

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Исключив x, y и z из уравнений (A), (E) и (F), имеем уравнение, связывающее C_1 и C_2

$$a^2C_1^2 + C_2^2 = R^2,$$

а подставляя сюда значения C_1 и C_2 из (E) и (F), находим частное решение

$$a^2y^2 + x^2z^2 = R^2x^2 = 0.$$

Приводим ответы на второй, третий и четвертый вопросы задачи:

2) $a^2c^2y^2 + b^2x^2z^2 - b^2c^2x^2 = 0$;

3) $a^2c^2y^2 - b^2x^2z^2 - b^2c^2x^2 = 0$;

4) $z = \frac{a^2}{2p} \cdot \frac{y^2}{x^2}$.

Задача 18,3. Найти общий интеграл уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + \left(y - \sqrt{R^2 - z^2}\right)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Это уравнение — уравнение с частными производными первого порядка.

Решение. Составляем прежде всего обыкновенное уравнение вида (18,14'), которое соответствует данному

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y - \sqrt{R^2 - z^2}}. \tag{A}$$

Решение данного уравнения $z = C_1$, которое является самоочевидным, мы сразу же используем для интегрирования уравнения (A), подставив в него C_1 вместо z. Получим

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y - \sqrt{R^2 - C_1^2}},$$

откуда

$$ydx - \sqrt{R^2 - C_1^2}\,dx = xdy$$

или

$$xdy - ydx = -\sqrt{R^2 - C_1^2}\,dx.$$

Разделим обе части на x^2:

$$\frac{x dy - y dx}{x^2} = -\sqrt{R^2 - C_1^2}\,\frac{dx}{x^2}$$

или, учитывая, что $\frac{x dy - y dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$, а $\frac{dx}{x^2} = d\left(-\frac{1}{x}\right)$, интегрируя, получим

$$\frac{y}{x} = \sqrt{R^2 - C_1^2} \cdot \frac{1}{x} + C_2$$

или

$$\frac{y - \sqrt{R^2 - C_1^2}}{x} = C_2.$$

Заменим теперь C_1 на z:

$$\frac{y - \sqrt{R^2 - z^2}}{x} = C_2.$$

Значит, общий интеграл на основании (18,16') будет таким:

$$z = \varphi\left(\frac{y - \sqrt{R^2 - z^2}}{x}\right).$$

Задача 18,4. Найти общий интеграл уравнения

$$\frac{x}{y}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (1 - y^2)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (a - yz)\frac{\partial\varphi}{\partial z} + (b - yu)\frac{\partial\varphi}{\partial u} = 0.$$

Решение. Это линейное уравнение с частными производными первого порядка, искомой функцией φ от независимых переменных x, y, z и u. Составляем систему (18,14) обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую заданному

$$\frac{dx}{\frac{x}{y}} = \frac{dy}{1 - y^2} = \frac{dz}{a - yz} = \frac{du}{b - yu},$$

или, умножая все знаменатели на y, будем иметь

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y(1 - y^2)} = \frac{dz}{y(a - yz)} = \frac{du}{y(b - yu)}. \qquad \text{(A)}$$

Отсюда выделяем такие три уравнения

$$1)\ \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y(1 - y^2)};$$

$$2)\ \frac{dy}{y(1 - y^2)} = \frac{dz}{y(a - yz)};$$

$$3)\ \frac{dx}{x} = \frac{du}{y(b - yu)}.$$

Интегрируем первое из них:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y(1-y^2)};\ \int\frac{dx}{x}=\int\frac{dy}{y(1-y^2)}.$$

Вычислим интеграл в правой части

$$\int\frac{dy}{y(1-y^2)}=\int\frac{1-y^2+y^2}{y(1-y^2)}dy=\int\frac{dy}{y}+\int\frac{ydy}{(1-y^2)}=$$
$$=\ln y-\frac{1}{2}\ln(1-y^2)+\ln C_1.$$

Отсюда для первого уравнения

$$\ln x=\ln y-\frac{1}{2}\ln(1-y^2)+\ln C_1$$

и, потенцируя, имеем

$$\frac{x\sqrt{1-y^2}}{y}=C_1.$$

Теперь приступаем к интегрированию второго уравнения, присоединив к его правой части дробь $\frac{dx}{x}$ из системы (А)

$$\frac{dy}{y(1-y^2)}=\frac{dz}{y(a-yz)};\ \frac{zdy}{yz(1-y^2)}=\frac{ydz}{y^2(a-yz)}=\frac{dx}{x};$$
$$\frac{ydz-zdy}{ay^2-y^2z-yz+y^3z}=\frac{dx}{x};\ \frac{ydz-zdy}{ay^2-yz}=\frac{dx}{x};$$
$$\frac{\frac{ydz-zdy}{y^2}}{a-\frac{z}{y}}=\frac{dx}{x};\ \frac{d\left(\frac{z}{y}\right)}{a-\frac{z}{y}}=\frac{dx}{x};\ \frac{d\left(\frac{z}{y}\right)}{\frac{z}{y}-a}=-\frac{dx}{x}.$$

Интегрирование этого уравнения дает:

$$\ln\left(\frac{z}{y}-a\right)=-\ln x+\ln C_2,$$

откуда

$$\frac{x(z-ay)}{y}=C_2.$$

Подобным же образом для третьего уравнения получим

$$\frac{x(u-by)}{y}=C_3$$

и общий интеграл напишется так:

$$\varphi=f\left[\frac{x\sqrt{1-y^2}}{y},\ \frac{x(z-ay)}{y},\ \frac{x(u-by)}{y}\right].$$

Правило для интегрирования линейных уравнений общего вида с частными производными первого порядка

Это уравнение имеет вид

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = Z, \qquad (18,19)$$

где z — неизвестная функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а $X_1, X_2, \ldots, X_n$, Z — данные функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. От уравнения (18,13) оно отличается тем, что его правая часть не нуль, а функция независимых переменных и искомой функции z.

Правила интегрирования. Для интегрирования уравнения (18,19) следует написать соответствующую ему систему обыкновенных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z}. \qquad (18,20)$$

Проинтегрировав эту систему и разрешив ее интегралы относительно произвольных постоянных, получаем n различных интегралов

$$U_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C_i \ (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \qquad (18,21)$$

Общий интеграл уравнения (18,19) есть неявная функция z и записывается так:

$$V(U_1, U_2, \ldots, U_n) = 0 \qquad (18,22)$$

где V — произвольная функция.

Произвольную функцию, входящую в общее решение, можно найти, если известно, что определяемая ею поверхность проходит через заданную линию (18,18). Эту поверхность находят описанным выше способом.

Задача 18,5. Проинтегрировать уравнение

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

и найти произвольную функцию из условия, что интегральная поверхность проходит через эллипс

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1; \ z = 0. \qquad (A)$$

Решение. Система (18,20) обыкновенных уравнений, соответствующая этому уравнению, будет выглядеть так:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}.$$

Выделяем уравнения $\frac{dx}{a} = \frac{dz}{1}$ и $\frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$. Интегрируя, получаем

$$dx = a\,dz; \quad x = az + C_1; \quad x - az = C_1; \qquad (B)$$

$$dy = b\,dz; \quad y = bz + C_2; \quad y - bz = C_2. \qquad (C)$$

Согласно изложенной теории на основании (18,21) общее решение имеет вид

$$V(x-az,\ y-bz)=0.$$

Сличая с формулой (18,5), заключаем, что полученное общее решение есть уравнение цилиндрических поверхностей.

Разрешим общее решение относительно искомой функции z

$$x-az=f(y-bz);$$

$$z=\frac{x}{a}-\frac{1}{a}f(y-bz).$$

Теперь найдем вид произвольной функции f, исходя из условий задачи. Исключая для этого x, y и z из уравнений (A), (B) и (C) и найдем соотношение между C_1 и C_2

$$\frac{C_1^2}{m^2}+\frac{C_2^2}{n^2}=1;$$

заменяя C_1 и C_2 их значениями из (B) и (C), получаем

$$\frac{(x-az)^2}{m^2}+\frac{(y-bz)^2}{n^2}=1.$$

Это уравнение определяет эллиптический цилиндр.

Задача 18,6. Найти общее решение уравнения

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=c\frac{\partial u}{\partial z}=xyz.$$

Решение. Система обыкновенных уравнений, соответствующая данному, запишется так:

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{c}=\frac{du}{xyz}.$$

Выделим из этой системы три таких уравнения:

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b};\ \frac{dx}{a}=\frac{dz}{c};\ \frac{dx}{a}=\frac{du}{xyz}.$$

Первые два из них дают возможность найти два первых интеграла

$$ady=bdx,$$

или

$$ady-bdx=0.$$

После интегрирования получим

$$ay-bx=C_1,$$

или

$$y=\frac{C_1+bx}{a}.$$

Точно так же второе уравнение после интегрирования даст

$$az - cx = C_2,$$

или

$$z = \frac{C_2 + cx}{a}.$$

Подставим полученные значения y и z в третье уравнение

$$\frac{dx}{a} = \frac{du}{xyz},$$

что даст

$$\frac{dx}{a} = \frac{a^2 du}{(C_1 + bx)(C_2 + cx)x},$$

или

$$a^3 du = x(C_1 + bx)(C_2 + cx)\,dx,$$

откуда, интегрируя, получаем

$$a^3 u = C_1 C_2 \frac{x^2}{2} + (bC_2 + cC_1)\frac{x^3}{3} + bc\frac{x^4}{4} + C_3,$$

а, заменяя C_1 и C_2 их значениями, будем иметь

$$a^3 u = (ay - bx)(az - cx)\frac{x^2}{2} + [b(az - cx) + c(ay - bx)]\frac{x^3}{3} + \\ + bc\frac{x^4}{4} + C_3,$$

или после упрощений

$$a^3 u = a^2 yz\frac{x^2}{2} - a(bz + cy)\frac{x^3}{6} + bc\frac{x^4}{12} + C_3,$$

откуда

$$a^3 u - a^2 yz\frac{x^2}{2} + a(bz + cy)\frac{x^3}{6} - bc\frac{x^4}{12} = C_3.$$

Общий интеграл запишется так:

$$V\left(a^3 u - a^2 yz\frac{x^2}{2} + a(bz + cy)\frac{x^3}{6} - bc\frac{x^4}{12},\ ay - bx,\ az - cx\right) = 0,$$

или

$$a^3 u - a^2 yz\frac{x^2}{2} + a(bz + cy)\frac{x^3}{6} - bc\frac{x^4}{12} = \varphi(ay - bx,\ az - cx).$$

Задача 18,7. Проинтегрировать уравнение

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = axz.$$

Решение. Составляем систему (18,20) обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую заданному

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{dz}{axz}.$$

Выделяем уравнения $\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy}$ и $\frac{dy}{xy} = \frac{dz}{axz}$.

Преобразовывая их, получим

$$xdx - ydy = 0$$

и

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{az},$$

а интегрируя, находим первые интегралы

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = \frac{C_1}{2}$$

или

$$x^2 - y^2 = C_1$$

и

$$\ln y = \frac{1}{a}\ln z - \frac{1}{a}\ln C_2,$$

откуда

$$\ln y = \frac{1}{a}\ln\frac{z}{C_2},$$

или

$$y = \sqrt[a]{\frac{z}{C_2}};\ y^a = \frac{z}{C_2};\ \frac{z}{y^a} = C_2.$$

Общий интеграл будет выглядеть так:

$$V\left(x^2 - y^2,\ \frac{z}{y^a}\right) = 0,$$

откуда

$$\frac{z}{y^a} = f(x^2 - y^2),$$

или

$$z = y^a f(x^2 - y^2).$$

Задача 18,7. Найти общий интеграл уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{xy}.$$

Решение. Предложенное уравнение является линейным. Соответствующая ему система (18,20) обыкновенных уравнений

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{\frac{1}{xy}}$$

или

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = xydz.$$

Умножая на xy, запишем нашу систему в виде

$$ydx = xdy = x^2y^2dz;$$
$$\frac{ydx + xdy}{2} = x^2y^2dz,$$

а так как

$$ydx + xdy = d(xy),$$

можем переписать,

$$\frac{d(xy)}{2x^2y^2} = dz,$$

или

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d(xy)}{(xy)^2} = dz.$$

Таким образом, мы получили два уравнения:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \text{ и } \frac{1}{2}\frac{d(xy)}{(xy)^2} = dz.$$

Интегрируем первое из них:

$$\ln x = \ln y - \ln C_1,$$

или

$$\frac{y}{C_1} = x,$$

т. е.

$$\frac{y}{x} = C_1.$$

Интегрирование второго дает

$$-\frac{1}{2xy} = z - C_2; \quad z + \frac{1}{2xy} = C_2,$$

а общий интеграл его имеет вид

$$V\left(\frac{y}{x},\ z + \frac{1}{2xy}\right) = 0$$

или

$$z + \frac{1}{2xy} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

и окончательно

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2xy}.$$

Задача 18,8. Найти общий интеграл уравнения

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = x + y.$$

Решение. Предложенное уравнение является линейным. Система (18,20) обыкновенных уравнений, которая ему соответствует, запишется так:

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{dz}{x+y},$$

и мы получим два уравнения

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \text{ и } \frac{dx - dy}{x + y} = \frac{dz}{x + y}$$

или

$$dx - dy = dz.$$

Интегрируем первое из них:

$$-xdx = ydy,$$

т. е.

$$xdx + ydy = 0,$$

откуда

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{C_1}{2},$$

т. е.

$$x^2 + y^2 = C_1.$$

Интегрируя же второе, будем иметь

$$dx - dy = dz; \ d(x - y) = dz;$$

$$x - y = z + C_2$$

или

$$x - y - z = C_2.$$

Общий интеграл

$$V(\widetilde{\widetilde{x}}^2 + y^2, \ x - y - z) = 0,$$

откуда

$$x - y - z = \varphi(x^2 + y^2),$$

т. е.

$$z = x - y - \varphi(x^2 + y^2),$$

а полагая

$$-\varphi(x^2 + y^2) = f(x^2 + y^2),$$

общее решение получим в виде

$$z = x - y + f(x^2 + y^2).$$

Задача 18,9. Найти общий интеграл уравнения

$$\sin x \frac{\partial z}{\partial x} + \cos x \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Решение. Это уравнение также является линейным неоднородным уравнением, и система (18,20) обыкновенных уравнений, ему соответствующая, будет такой:

$$\frac{dx}{\sin x} = \frac{dy}{\cos x} = \frac{dz}{1},$$

откуда 1) $\frac{dx}{\sin x} = \frac{dy}{\cos x}$ или $\frac{\cos x}{\sin x} dx = dy$ и 2) $\frac{dx}{\sin x} = \frac{dz}{1}$.

Интегрируем первое из них:

$$\ln \sin x = y - C_1$$

или

$$y - \ln \sin x = C_1.$$

Интегрирование же второго уравнения дает

$$\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} = z - C_2$$

или

$$z - \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} = C_2.$$

общий интеграл

$$V\left(z - \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2},\ y - \ln \sin x\right) = 0,$$

т. е.

$$z - \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \varphi(y - \ln \sin x),$$

или

$$z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \varphi(y - \ln \sin x).$$

Задача 18,10 (для самостоятельного решения). Найти общий интеграл уравнения

$$x^n \frac{\partial z}{\partial x} - x^{n-1} y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

Ответ.

$$V\left(ze^{\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}},\ xy\right) = 0;\quad ze^{\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}} = \varphi(xy).$$

Задача 18,11 (для самостоятельного решения). Найти общий интеграл уравнения

$$\frac{y}{e^x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{x}{e^y} \frac{\partial z}{\partial y} = xyz.$$

Ответ. Общий интеграл уравнения

$$V\left[e^{(1-x)\,e^x} \cdot z,\ (x-1)\,e^x - (y-1)\,e^y\right] = 0,$$

откуда

$$e^{(1-x)\,e^x} z = \varphi\left[(x-1)\,e^x - (y-1)\,e^y\right]$$

или

$$z = e^{(x-1)\,e^{-x}} \cdot \varphi\left[(x-1)\,e^x - (y-1)\,e^y\right).$$

Задача 18,12. Найти общий интеграл уравнения

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} + z^2 \frac{\partial u}{\partial z} = u.$$

Ответ.

$$V\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\ \frac{1}{z}-\frac{1}{x},\ ue^{\frac{1}{x}}\right)=0$$

или, решая относительно $ue^{\frac{1}{x}}$, имеем

$$ue^{\frac{1}{x}}=\varphi\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\ \frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right);$$

$$u=e^{-\frac{1}{x}}\varphi\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\ \frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right).$$

Задача 18,13. Определить общий интеграл уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Решение. Система (18,20) обыкновенных уравнений, соответствующая этому линейному неоднородному уравнению, будет записана так:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Из нее выделим два уравнения

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}\quad \text{и}\quad \frac{dx}{x}=\frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Интегрируем первое,

$$\ln x=\ln y-\ln C_1$$

или

$$x=\frac{y}{C_1},\quad \text{т. е.}\ \frac{y}{x}=C_1.$$

С помощью полученного решения проинтегрируем второе уравнение

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

которое преобразуем так:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{x\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}.$$

Заменим в нем $\frac{y^2}{x^2}$ на C_1^2.

Сокращаем еще на $\frac{1}{x}$:

$$dx=\frac{dz}{\sqrt{1+C_1^2}}$$

и, интегрируя, получим

$$x = \frac{z}{\sqrt{1+C_1^2}} + C_2$$

или, подставляя $C_1 = \frac{y}{x}$, найдем

$$x - \frac{z}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}} = C_2,$$

а отсюда

$$x - \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}} = C_2.$$

Теперь общий интеграл запишется так:

$$V\left(\frac{y}{x},\ x - \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0$$

или

$$x - \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$x\sqrt{x^2+y^2} - xz = \sqrt{x^2+y^2}\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Обозначая

$$\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

имеем окончательно

$$\sqrt{x^2+y^2} = z + f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Задача 18,14 (для самостоятельного решения). Найти общие интегралы уравнений

1) $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = z;$

2) $xy\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} = x^2.$

3) $xy\frac{\partial z}{\partial x} + x^2\frac{\partial z}{\partial y} = 2yz;$

4) $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z;$

5) $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x - y.$

Ответ.

1) $z = (x+y)f(x^2-y^2);$

2) $z = \frac{z^2}{x^2} + \frac{1}{xy}f(xy);$

3) $z = x^2 f(x^2-y^2);$

4) $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right);$

5) $z = x + y + f(xy).$

Задача 18,15 (для самостоятельного решения). Найти общие интегралы уравнений и их частные решения, предполагая, что поверхность, определяемая уравнением, проходит через заданную кривую

$$1)\ xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial x}=-xy.$$

Кривая

$$z=0;\ xy=a^2;$$

$$2)\ 2xz\frac{\partial z}{\partial x}+2yz\frac{\partial z}{\partial y}=z^2-x^2-y^2.$$

Кривая

$$x+y+z=0;\quad x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Ответ.

$$1)\ xy+z^2=a^2;$$

$$2)\ (x^2+y^2+z^2)^2=2R^2(x^2+y^2+xy).$$

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. Изд-во «Наука», М., 1967.
2. С. В. Фролов, Р. Я. Шостак. Курс высшей математики. Изд-во «Высшая школа», М., 1966.
3. Р. Фрезер, В. Дункан, А. Коллар. Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике. Изд-во иностр. литературы, М., 1950.
4. А. П. Филин. Некоторые элементарные сведения из линейной алгебры. Изд-во «Судпромгиз», 1961.
5. Б. В. Булгаков. Колебания. Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, М., 1954.
6. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. Гос. изд-во физ.-матем. лит-ры, М., 1961.
7. М. Дж. Сальвадори. Численные методы в технике. Изд-во иностр. лит-ры, М., 1955.
8. Б. П. Демидович и И. А. Марон. Основы вычислительной математики. Физматгиз, М., 1960.
9. А. С. Хаусхолдер. Основы численного анализа. Изд-во иностр. литературы, М., 1956.
10. И. П. Мысовских. Лекции по методам вычислений. Физматгиз, М., 1962.
11. И. С. Березин и Н. П. Жидков. Методы вычислений, Физматгиз, М., 1959.

СОДЕРЖАНИЕ